

الحدوديات

*- التمكن من تقنية القسمة الإقليدية على $x - a$ وإدراك قابلية القسمة على $x - a$.

I - الحدودية: كناية و مصطلحات - تساوي حدودتين

1- أنشطة

نشاط 1

لتكن الأعداد x و $x+3$ و $x+5$ أبعاد متوازي المستطيلات و $V(x)$ حجمه
حدد $V(x)$

$$V(x) = x(x+3)(x+5) = x^3 + 8x^2 + 15x$$

التعبير $x^3 + 8x^2 + 15x$ يسمى **تعبيرا حدوديا أو حدودية**
 x^3 هو الحد الذي له أكبر أس (هذا الأس هو 3) نقول إن **درجة** الحدودية $V(x)$ هو 3
نكتب $d^\circ(V(x)) = 3$

نشاط 2

حدد من بين التعابير التالية تلك التي تمثل حدوديات وحدد درجاتها

$$P(x) = \frac{1}{3}x^5 - 3x^3 + 4x - 1 ; Q(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 3 ; H(x) = -6$$

$$T(x) = 3x^2 + 2|x| ; G(x) = 2\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} ; K(x) = 2x^4 - 2\sqrt{x} + 2 ; N(x) = 0$$

*- كل تعبير على شكل ax^n حيث x متغير حقيقي و a عدد حقيقي و n عدد صحيح طبيعي يسمى حدية
إذا كان $a \neq 0$ درجة الحدية ax^n هو n و درجة الحدية a هو 0 .
الحدية المنعدمة لا درجة لها
*- الحدودية هي كل تعبير على شكل مجموع تكون جميع حدوده حديات

* $P(x)$ حدودية تتكون من أربعة حدود هي: -1 و $4x$ و $-3x^3$ و $\frac{1}{3}x^5$

العدد 3 هو درجة الحد $-3x^3$ و -3 معامل الحد $-3x^3$
العدد 5 هو درجة الحد $\frac{1}{3}x^5$ و $\frac{1}{3}$ معامل الحد $\frac{1}{3}x^5$

درجة الحدودية $P(x)$ هو 5 نكتب $d^\circ(P(x)) = 5$

* $Q(x)$ حدودية تتكون من 3 حدود . $d^\circ(Q(x)) = 2$

* $H(x)$ حدودية تتكون من حد واحد. $d^\circ(H(x)) = 0$

* كل تعبير من التعابير $T(x)$ و $G(x)$ و $K(x)$ ليس حدودية

* $N(x)$ حدودية منعدمة ليست لها درجة

الحدودية المنعدمة هي كل حدودية معاملاتها منعدمة.

نشاط 3

اختصر الحدودية $P(x) = -2x^5 + 3x^3 - 4x^4 + x^3 + x + x^2 - x^4$

اختصار حدودية هو كتابتها على شكل مجموع حدود درجاتها مختلفة مثني مثني

الشكل المختصر للحدودية $P(x)$ هو $P(x) = -2x^5 - 5x^4 + 4x^3 + x^2 + x$

نشاط 2

1- هل الحدوديتين P و Q متساويتان في كل الحالات

$$Q(x) = 3x^2 + x^3 - 4x + 1 + 3x^3$$

$$P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \quad *$$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2}+1}x^2 - 4x + 1 +$$

$$P(x) = (\sqrt{2}-1)x^2 - 4x + 1 \quad *$$

$$Q(x) = x^2 - 3x^3 + x$$

$$P(x) = -3x^3 + x^2 - x \quad *$$

$$P(x) = (a+b)x^3 + (b-c)x^2 + (a-c+1)x \quad \text{-2 لتكن}$$

حدد a و b و c لكي تكون $P(x)$ حدودية منعدمة.

-2 تعاريف

تعريف 1

لتكن $P(x)$ حدودية مختصرة و غير منعدمة. درجة $P(x)$ هي درجة الحد الذي له أكبر درجة

نرمز لها بالرمز $d^\circ(P(x))$

ملاحظة: الحدودية المنعدمة ليست لها درجة

تعريف 2

تكون حدوديتان، مختصرتان غير منعدمتين، متساويتين إذا كانت لهما نفس الدرجة و كانت معاملات حدودها من نفس الدرجة متساوية مثلى مثلى

-3 حالات خاصة

*- كل حدودية من الدرجة الأولى تسمى حدانية و تكتب على شكل $ax + b$

حيث $a \in \mathbb{R}^*$; $b \in \mathbb{R}$

*- الحدودية من الدرجة الثانية تسمى ثلاثية الحدود و تكتب على شكل $ax^2 + bx + c$

حيث $a \in \mathbb{R}^*$ $(b; c) \in \mathbb{R}^2$

-II مجموع و جداء

1- أنشطة

أ- أحسب $P(x) + Q(x)$ و $P(x) - Q(x)$ مع مقارنة $d^\circ(P + Q)$ و $d^\circ(P) + d^\circ(Q)$

$$Q(x) = 3x^5 - 3x^3 - 6x - 3$$

$$P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \quad *$$

$$Q(x) = 4x^6 - 3x^3 - 4x^2 - 6$$

$$P(x) = -4x^6 + 2x^3 - 6x^2 + 1 \quad *$$

ب- أحسب $P(x) \times Q(x)$ مع مقارنة $d^\circ(P \times Q)$ و $d^\circ(P) + d^\circ(Q)$

$$Q(x) = 2x^2 - 6x - 3$$

$$P(x) = -3x + 2 \quad *$$

$$Q(x) = x^3 - x^2 - 3$$

$$P(x) = 3x^2 - 4x + 1 \quad *$$

ج - عمل

$$Q(x) = (x+1)^3 - 27(x-1)^3$$

$$P(x) = (x-3)^2 - (5x+6)^2$$

-2 خصائص

*- مجموع حدوديتين P و Q هو حدودية يرمز لها بـ $P + Q$

ملاحظة: $d^\circ(P + Q) \leq \sup(d^\circ(P); d^\circ(Q))$

*- فرق حدوديتين P و Q هو حدودية يرمز لها بـ $P - Q$

ملاحظة: $d^\circ(P - Q) \leq \sup(d^\circ(P); d^\circ(Q))$

*- جداء حدوديتين P و Q هو حدودية يرمز لها بـ $P \times Q$

ملاحظة: $d^\circ(P \times Q) = d^\circ(P) + d^\circ(Q)$

-III جذر حدودية - القسمة على $a-x$

(1) جذر حدودية

تعريف

لتكن $P(x)$ حدودية و α عددا حقيقيا
نقول إن العدد α جذر للحدودية $P(x)$ إذا كان $P(\alpha) = 0$

أمثلة

$$P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$$

حدد من بين الأعداد التالية 1 و-1 و 2 و -3. تلك التي تمثل جذرا لـ $P(x)$

(2) القسمة على $x-a$

أنشطة

أ- نعتبر $P(x) = x^3 + x + 1$

- أحسب $P(3)$

- حدد حدودية $Q(x)$ حيث

$$P(x) - P(3) = (x - 3)Q(x)$$

ب- نعتبر $P(x) = 2x^4 - 3x^2 - x - 2$

- حدد حدودية $Q(x)$ حيث

$$P(x) - P(1) = (x - 1)Q(x)$$

- حدد حدودية $Q'(x)$ حيث

$$P(x) - P(2) = (x - 2)Q'(x)$$

أ- خاصة

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \geq 1$ و α عددا حقيقيا .
توجد حدودية وحيدة $Q(x)$ درجتها $n-1$ حيث $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$
 $Q(x)$ خارج القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x - \alpha$
 $P(\alpha)$ باقي القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x - \alpha$

ب- تقنية لحساب الخارج و الباقي

لنحدد خارج و باقي القسمة الاقليدية لـ $P(x)$ على $x - 3$

حيث $P(x) = -3x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x + 1$

$$\begin{array}{r|l}
 -3x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x + 1 & x - 3 \\
 \hline
 3x^4 - 9x^3 & -3x^3 - 7x^2 - 22x - 71 \\
 -7x^3 - x^2 & \\
 7x^3 - 21x^2 & \\
 -22x^2 - 5x & \\
 22x^2 - 66x & \\
 -71x + 1 & \\
 71x - 213 & \\
 -212 &
 \end{array}$$

ملاحظة $P(3) = -212$

* $P(x) = -2x^5 - x^2 + 3x - 2$

حدد خارج و باقي القسمة الاقليدية لـ $P(x)$ على $x - 2$

ج- قابلية القسمة على $x-a$

تعريف

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \geq 1$ و α عددا حقيقيا
 نقول إن $P(x)$ تقبل القسمة على $x - \alpha$ إذا وجدت حدودية $Q(x)$ درجتها $n - 1$
 حيث $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$
 ملاحظة: $P(\alpha) = 0$

تمرين نعتبر $P(x) = x^3 - x - 6$

حدد حدودية $Q(x)$ حيث $P(x) = (x - 2)Q(x)$ نلاحظ أن $P(2) = 0$

نتيجة

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \geq 1$ و α عددا حقيقيا
 نقول إن $P(x)$ تقبل القسمة على $x - \alpha$ إذا و فقط إذا كان α جدرا للحدودية $P(x)$.

تمرين نعتبر $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

- 1- تأكد أن $P(x)$ تقبل القسمة على $x - 3$
 - 2- بإنجاز القسمة الاقليدية حدد حدودية $Q(x)$ حيث $P(x) = (x - 3)Q(x)$
 - 3- بين أن -1 جدرا للحدودية $Q(x)$. عمل $Q(x)$.
- استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$.

تمرين $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

- 1- أحسب $P(-2)$ و $P(1)$ و $P(3)$
- 2- أنجز القسمة الاقليدية لـ $P(x)$ على $x + 2$
- 3- بين إذا كان α جدرا غير منعدم لـ $P(x)$ فإن $\frac{1}{\alpha}$ جدرا لـ $P(x)$. استنتج الجذور الثلاث.

تمرين $P(x) = 2x^3 + mx^2 - 11x - 6$

- 1- حدد m حيث $P(x)$ تقبل القسمة على $x - 2$
 - 2- نضع $m = 3$. أحسب $P(-3)$.
- استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$.