

الحساب المتجهي

القدرات المنتظرة

- *- إنشاء متجهة من شكل $a\vec{u} + b\vec{v}$.
- *- التعبير عن مفاهيم وخاصيات الهندسة التآلفية باستعمال الأداة المتجهية، والعكس.
- *- حل مسائل هندسية باستعمال الأداة الهندسية.

(I) - تساوي متجهتين - جمع المتجهات

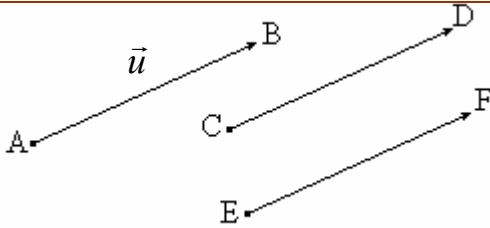
1- أنشطة

- 1- ليكن A و B و C و D أربع نقط من المستوى
أنشئ M و N حيث $\vec{BM} = \vec{AC}$ و $\vec{AN} = \vec{AC} + \vec{AD}$ قارن \vec{BD} و \vec{MN}
- 2- ليكن ABCD متوازي الأضلاع مركزه O
أنشئ M حيث $\vec{OM} = \vec{AB} + \vec{AD}$ و أنشئ I حيث $\vec{DI} = \vec{OD} - \vec{BC}$
أثبت أن $\vec{CM} = \vec{AO}$
- 3- ليكن A و B و C و D و E و F نقاطا
اختصر $\vec{BE} + \vec{DF} + \vec{EF} + \vec{AB} + \vec{ED} + \vec{FA}$

2- تساوي متجهتين

ب- تعريف

تكون متجهتان متساويتان إذا كان لهما نفس الاتجاه و نفس المنحى و نفس المنظم



$$\vec{u} = \vec{AB} = \vec{CD} = \vec{EF} \text{ نكتب}$$

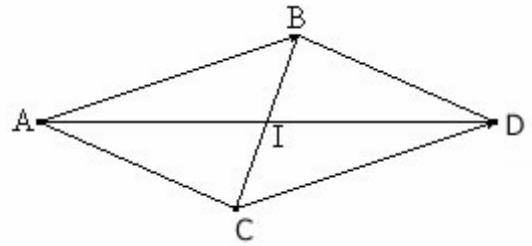
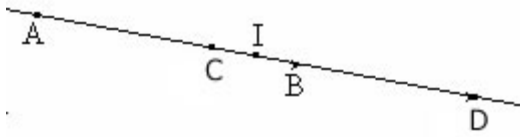
ج- المتجهة المنعدمة

*- المتجهة المنعدمة $\vec{0}$: $\vec{0} = \vec{MM}$ لكل نقطة M من المستوى

د - خاصيات

خاصية 1

A و B و C و D أربع نقط من المستوى
 $\vec{AB} = \vec{CD}$ إذا وفقط إذا كان للقطعتين $[AD]$ و $[BC]$ نفس المنتصف



I منتصف القطعتين $[BC]$ و $[AD]$

خاصية 2

إذا كانت A و B و C و D أربع نقط غير مستقيمية في المستوى فان :
 $\vec{AB} = \vec{CD}$ إذا وفقط إذا كان ABDC متوازي الأضلاع

نتيجة

لتكن A و B و C و D أربع نقط من المستوى
 $\vec{AB} = \vec{CD}$ إذا وفقط إذا كان $\vec{AC} = \vec{BD}$ (تبديل الوسطين)
 $\vec{AB} = \vec{CD}$ إذا وفقط إذا كان $\vec{DB} = \vec{CA}$ (تبديل الطرفين)

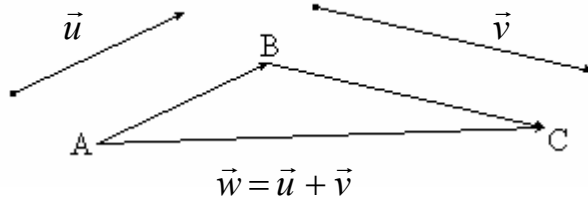
3- مجموع متجهتين -علاقة شال

أ- \vec{u} و \vec{v} متجهتان في المستوى

لتكن A نقطة من المستوى، توجد نقطة وحيدة B حيث $\vec{AB} = \vec{u}$.

توجد نقطة وحيدة C حيث $\vec{BC} = \vec{v}$.

النقطتان A و C تحددان متجهة وحيدة $\vec{w} = \vec{AC}$



المتجهة \vec{w} هي مجموع المتجهتين \vec{u} و \vec{v} نكتب $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

ب- علاقة شال

مهما كانت النقط A و B و C من المستوى

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

ب- نتيجة

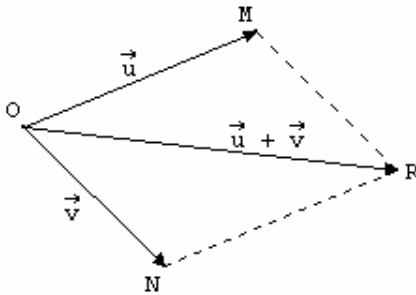
لتكن O و M و N و R أربع نقط من المستوى

$\vec{OM} + \vec{ON} = \vec{OR}$ إذا وفقط إذا كان $OMRN$ متوازي الأضلاع

ملاحظة

إذا كانت $\vec{u} = \vec{OM}$ و $\vec{v} = \vec{ON}$ فان

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{OR}$ حيث $OMRN$ متوازي الأضلاع



ج- خاصيات

*- لكل متجهتين \vec{u} و \vec{v} $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

*- لكل ثلاث متجهات \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

*- لكل متجهة \vec{u} $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

4- مقابل متجهة - فرق متجهتين

أ- مقابل متجهة

تذكير لتكن $\vec{u} = \vec{AB}$ المسافة AB تسمى منظم المتجهة \vec{u} نكتب $\|\vec{u}\| = AB$

تعريف

لتكن \vec{u} متجهة غير منعدمة

مقابل المتجهة \vec{u} هي المتجهة التي لها نفس الاتجاه و نفس المنظم و منحاهها مضاد

لمنحى المتجهة \vec{u} نرمز لها بالرمز $-\vec{u}$

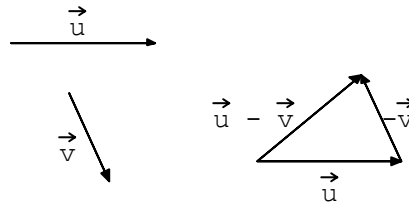
*- لكل متجهة \vec{u} : $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

* لكل نقطتين A و B من المستوى لدينا $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$

المتجهتان \vec{AB} و \vec{BA} متقابلتان نكتب $\vec{AB} = -\vec{BA}$

ب- فرق متجهين
تعريف

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) \quad \vec{v} \text{ و } \vec{u} \text{ لكل متجهين}$$

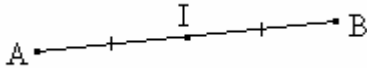


خاصية

$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} \quad C \text{ و } B \text{ و } A \text{ لكل ثلاث نقط}$$

5- منتصف قطعة
تعريف

$$I \text{ منتصف } [AB] \text{ إذا وفقط إذا كان } \vec{AI} = \vec{IB}$$



خاصية

$$I \text{ منتصف } [AB] \text{ إذا وفقط إذا كان } \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$$

تمرين

ليكن ABC مثلثا و E و F نقطتين حيث $\vec{AE} = \vec{CB}$ و $\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AC}$

1- أنشئ الشكل

2- أثبت أن B منتصف $[EF]$

(II) ضرب متجهة في عدد حقيقي
أنشطة

نشاط 1

ليكن ABC مثلثا حيث $AB = 6$ و M نقطة من $[AB]$ حيث $AM = 2$

الموازي للمستقيم (BC) و المار من M يقطع $[AC]$ في N

1- عبر عن \vec{MN} بدلالة \vec{BC}

2- عبر عن \vec{MN} بدلالة \vec{BC}

نشاط 2

ليكن ABC مثلثا نضع $\vec{u} = \vec{AB}$ و $\vec{v} = \vec{AC}$

أنشئ $3\vec{u}$ و $-2\vec{v}$ و $3\vec{u} - 2\vec{v}$

1 - تعريف

\vec{u} متجهة غير منعدمة و k عدد حقيقي غير منعدم
جاء المتجهة \vec{u} في العدد الحقيقي k هي المتجهة $k\vec{u}$ حيث :

* \vec{u} و $k\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه

$$* \|\vec{k\vec{u}}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$$

منحى \vec{u} إذا كان $k > 0$

* منحى $k\vec{u}$ هو
عكس منحى \vec{u} إذا كان $k < 0$



2 - نتائج (نقلها)

$$\begin{aligned} \text{مهما تكن المتجهتان } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ و مهما يكن العددين الحقيقيين } \alpha \text{ و } \beta \text{ فان} \\ (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \quad \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \\ (\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u}) \quad 1 \cdot \vec{u} = \vec{u} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ إذا و فقط إذا كان } \alpha = 0 \text{ أو } \vec{u} = \vec{0} \end{aligned}$$

تمارين

1- بسط $\vec{A} = 5(2\vec{u} - \vec{v}) - \frac{3}{2}(\vec{u} + 2\vec{v}) - (\vec{u} - \vec{v})$

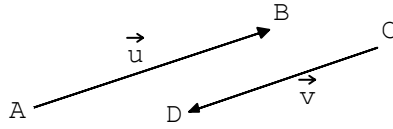
2- حدد x حيث $2x \cdot \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$ علما أن $\vec{u} \neq \vec{0}$

(II) الاستقامية

1- استقامية متجهتين

أ- تعريف

تكون متجهتان \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين إذا و فقط كانت احدهما جداء الأخرى في عدد حقيقي



ملاحظة

$\vec{0}$ مستقيمة مع أية متجهة

ب- خاصية و تعريف

لتكن $A \neq B$ و C و B و A نقطة من المستوى حيث $A \neq B$
المتجهتان \vec{AB} و \vec{AC} مستقيمتان إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي α حيث
 $\vec{AC} = \alpha \vec{AB}$
العدد الحقيقي α يسمى أفصول C في المعلم $(A; B)$

مثال

$$\begin{aligned} \vec{AE} = -3\vec{AB} \quad \text{3- أفصول } E \text{ في المعلم } (A; B) \\ \vec{CF} = \sqrt{2} \cdot \vec{CD} \quad \text{2- أفصول } F \text{ في المعلم } (C; D) \end{aligned}$$

تمرين

لتكن A و B و C و M أربع نقط و \vec{u} و \vec{v} متجهتين حيث $\vec{u} = \vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}$
و $\vec{v} = 2\vec{BA} - 6\vec{BC}$
1- بين أن $\vec{u} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$
2- بين أن \vec{u} و \vec{v} مستقيمتان

ج- خاصية

$$I \text{ منتصف } [AB] \text{ تكافئ } \vec{AB} = 2\vec{AI} \text{ (و تكافئ أيضا } \vec{AB} = 2\vec{IB} \text{)}$$

2- استقامية ثلاث نقط

تعريف

لتكن $A \neq B$ و C و B و A نقطة من المستوى حيث $A \neq B$
تكون النقط A و B و C مستقيمة إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي α حيث
 $\vec{AC} = \alpha \vec{AB}$

تمرين

ليكن $ABCD$ متوازي الأضلاع و P و Q نقطتين حيث $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{AD}$

- 1- انشئ الشكل
- 2- عبر عن \overrightarrow{CP} و \overrightarrow{CQ} بدلالة \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AD}
- 3- استنتج أن النقط P و Q و C مستقيمية

3- توازي مستقيمين خاصية

لتكن A و B و C و D نقطا من المستوى حيث $A \neq B$ و $C \neq D$
 $(AB) \parallel (CD)$ إذا و فقط إذا كان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{CD} مستقيمتين

تمرين

ليكن ABC مثلثا و I و J نقطتين حيث $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$

- 1- عبر عن \overrightarrow{IC} و \overrightarrow{BJ} بدلالة \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC}
- 2- استنتج أن $(IC) \parallel (BJ)$