

المادة: الرياضيات

مذكرة رقم : 2

الأستاذ : عثمانى نجيب

ملخص لدرس نهاية متتالية

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

الامتدادات	المكتسبات السابقة	القدرات المنظرة	محتوى الدرس
دراسة وضعيات متقطعة من مجالات مختلفة	<ul style="list-style-type: none"> ○ نهايات الدوال العديدية ○ المتتاليات الهندسية و المتتاليات الحسابية ○ المتتاليات من صنف $U_{n+1} = aU_n + b$ 	استعمال نهاية المتتاليات المرجعية لتحديد نهاية متتالية	<ul style="list-style-type: none"> ❖ نهاية المتتاليات المرجعية : (n) و (n^2) و (n^3) و (\sqrt{n}) و (n^p) حيث $p \geq 3$ و $p \in \mathbb{N}$ ❖ نهاية المتتاليات المرجعية : $\left(\frac{1}{n}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ حيث $p \geq 3$ و $p \in \mathbb{N}$ ❖ نهاية متتالية هندسية: (a^n) حيث $a \in \mathbb{R}$

1. متتاليات مرجعية نهايتها $+\infty$

تمرين 1

[حسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 7\sqrt{x} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^6 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{8}x^4 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 9x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -6\sqrt{x} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^7 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x$$

ولكون المتتالية العديدية هي نوع من الدوال العديدية معرفة على \mathbb{N} أو جزء من \mathbb{N} فإننا نحصل على نتائج مشابهة :

1. خاصية :

المتتاليات المرجعية : (n) و (n^2) و (n^3) و (\sqrt{n}) و (n^p) حيث $p \geq 4$ و $p \in \mathbb{N}$ تؤول الى

$+\infty$ عندما تؤول n الى $+\infty$

ونكتب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

2. خاصية :

إذا كانت (u_n) متتالية مرجعية نهايتها $+\infty$ فان المتتالية $(-u_n)$ تؤول الى $-\infty$

II. متتاليات مرجعية نهايتها 0

خاصية

المتتاليات المرجعية : $\left(\frac{1}{n}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ حيث $p \in \mathbb{N}$ و $p \geq 4$ تؤول

الى 0 عندما تؤول n الى $+\infty$

ونكتب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

تمرين

[حسب النهايات التالية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^7} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-6}{\sqrt{n}} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n^3} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^9 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}n^6 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -3n^5$$

III. متتاليات نهايتها عدد

مثال :

[حسب النهايات التالية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^7} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} + 5 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4}{n^3} - 7 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^9 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}n^6 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -3n^5$$

ملاحظات :

كل متتالية تكون نهايتها عددا حقيقيا تسمى متتالية متقاربة $\color{blue}{\blacksquare}$
كل متتالية غير متقاربة تسمى متتالية متباعدة $\color{blue}{\blacksquare}$

IV. نهاية المتتالية (a^n)

خاصية: ليكن a عددا حقيقيا

1. إذا كان $a > 1$ فان (a^n) تؤول إلى $+\infty$

2. إذا كان $a = 1$ فان (a^n) تؤول إلى 1

3. إذا كان $-1 < a < 1$ فان (a^n) تؤول إلى 0

4. إذا كان $a \leq -1$ فان : المتتالية (a^n) ليست لها نهاية

أمثلة : [حسب النهايات التالية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-5)^n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n$$

تمرين : أحسب النهايات التالية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,7)^n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3)^n - \frac{1}{2^n}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3)^n + (2)^n}{(2)^n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(5)^n}{(4)^n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (4)^{-n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{5}{n^2} - 1$$

V. العمليات على النهايات

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين و l و l' و α أعدادا حقيقية
العمليات على المتتاليات العددية هي نفسها على الدوال العددية

1. الجمع و الضرب :

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	l'	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞
$\lim v_n$	l'	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim(u_n \times v_n)$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

2. المقلوب :

$\lim u_n$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

3. الخارج:

$\lim u_n$	l	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$-\infty$	$l < 0$	l	∞	0
$\lim v_n$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$l < 0$	$-\infty$	∞	∞	0
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0^+	0^-	0^-	$+\infty$	0^+	0	شكل غير محدد	شكل غير محدد

مثال : أحسب النهاية التالية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2n$

تمرين : أحسب النهايات التالية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^3 - 5n^2 + 3n - 1$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{7}{n^2}}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n^5 + 3n - 4}$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2 - 9}{3n + 1}$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n - 3}{3n + 5}$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6n^3 - 2n^5 + 7n - 9$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^2 - (n-1)^2$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2 + 1}{14n^3 - 5n + 9}$

ملاحظة:

- ❖ نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة
- ❖ نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حدها الأكبر درجة.

تمرين : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} \\ u_0 = 3 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + 1$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1

2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

3. أكتب v_n بدلالة n

4. استنتج u_n بدلالة n

5. أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

تمرين : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + \frac{3}{2} \\ u_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + \frac{3}{4}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1

2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3

3. أكتب v_n بدلالة n

4. استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{13}{12} \times 3^n - \frac{3}{4}$

5. أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

تمرين : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - \frac{8}{3}$

1. أحسب v_0 و v_1

2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها : $\frac{1}{4}$

3. أكتب v_n بدلالة n

4. استنتج u_n بدلالة n

5. أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

6. بين أن : $v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} = -\frac{44}{9} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right)$

7. بين أن : $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = -\frac{44}{9} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) + \frac{8}{3}n$