المعادلة التفاضلية	حل المعادلة التفاضلية
$y' = ay + b$	$y(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}\ ; \lambda \in \mathbb{R}$
$ay'' + by' + cy = 0$ **المعادلة المميزة :** $ar^2 + br + c = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$ ليكن r_1 و r_2 حلي المعادلة المميزة إذن : $y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$
	$\Delta = 0$ ليكن r حل المعادلة المميزة : $y(x) = (\lambda x + \beta)e^{rx}$ $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$
	$\Delta < 0$ ليكن $z = p + qi$ أحد حلول المعادلة المميزة : $y(x) = e^{px}(\lambda \cos qx + \beta \sin qx)$ $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$

المتتالية الحسابية :

تكون U_n متتالية حسابية إذا كان :

$$U_{n+1} - U_n = r$$

إذا كانت U_n متتالية حسابية أساسها r و حدها الأول هو U_0

فإن :

$$U_n = U_0 + nr$$

بصفة عامة : $U_n = U_p + (n-p)r$

تحديد المجموع بدلالة n .

$$U_0 + U_1 + \ldots\ldots + U_n = \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$$

بصفة عامة :

$$U_p + U_{p+1} + \ldots + U_n = \frac{(n-p+1)}{2}(U_p + U_n)$$

المتتالية الهندسية :

تكون V_n متتالية هندسية إذا كان :

$$V_{n+1} = q.V_n$$

إذا كانت V_n متتالية هندسية أساسها q و حدها الأول V_0

فإن :

$$V_n = q^n.V_0$$

بصفة عامة :

$$V_n = V_p.q^{n-p}$$

تحديد المجموع بدلالة n .

$$V_0 + V_1 + \ldots\ldots + V_n = V_0.\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\ ; q \neq 1$$

بصفة عامة :

$$V_p + V_{p+1} + \ldots + V_n = V_p.\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\ ; q \neq 1$$

- كل متتالية تزايدية فهي مصغورة بحدها الأول
- كل متتالية تناقصية فهي مكبورة بحدها الأول

رتابة متتالية :

$U_{n+1} - U_n \geq 0$	$U_{n+1} - U_n \leq 0$
تزايدية	تناقصية

المتتالية المتقاربة

تكون المتتالية U_n متقاربة إذا كانت :

تزايدية و مكبورة	تناقصية و مصغورة	لها نهاية منتهية

نهاية المتتالية الهندسية q^n

$q \leq -1$	$q=1$	$-1<q<1$	$q>1$
ليس لها نهاية	$\lim q^n = 1$	$\lim q^n = 0$	$\lim q^n = +\infty$

متتالية من نوع $U_{n+1} = f(U_n)$

إذا كانت f متصلة على I بحيث :

$$\begin{cases} f(I) \subset I \\ U_0 \in I \text{ et } U_n \subset I \\ U \text{ متقارب} \end{cases}$$

إذن لـ (U_n) نهاية منتهية l بحيث $l = f(l)$

الشكل المثلثي لعدد عقدي :

حدد الشكل المثلثي للعدد Z بحيث : $Z = x + iy$

نحسب أولا : $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$

ثم نكتب : $Z = r\left(\frac{x}{r} + i\frac{y}{r}\right)$

ثم نلاحظ :

$\frac{y}{r}$		
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

مثال : $Z = 1 + \sqrt{3}i$

$$|Z| = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$Z = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left[2; \frac{\pi}{3}\right]$$

– تحديد طبيعة المثلث ABC :

إذا كان :

$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \left[1; \frac{\pi}{2}\right]$	فإن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة A
$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \left[1; \frac{\pi}{3}\right]$	فإن المثلث ABC متساوي الأضلاع
$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \left[k; \frac{\pi}{2}\right]$	فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A

– حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$aZ^2 + bZ + c = 0$$

نحسب : $\Delta = b^2 - 4ac$

الحالة	z_1	z_2
$\Delta > 0$	$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta < 0$	$\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$\frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	$z = \frac{-b}{2a}$	

– التحويلات الاعتيادية :

لتكن $M'(Z')$ هي صورة $M(Z)$ بـ (الإزاحة) أو (التحاكي) أو (الدوران)

- الإزاحة $T(\vec{u})$

$$T(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$
$$\Leftrightarrow Z' - Z = Z_{\vec{u}} \Leftrightarrow Z' = Z + Z_{\vec{u}}$$

- التحاكي $h(\Omega; k)$

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$
$$\Leftrightarrow Z' - Z_\Omega = k(Z - Z_\Omega)$$
$$\Leftrightarrow Z' = Z_\Omega + k(Z - Z_\Omega)$$

- الدوران $R(\Omega; \theta)$

$$R(M) = M' \Leftrightarrow Z' - z_\Omega = (Z - Z_\Omega)e^{\theta i}$$
$$\Leftrightarrow Z' = Z_\Omega + (Z - Z_\Omega)e^{\theta i}$$

-إحداثيات متجهة :

لتكن $A(x_a; y_a; z_a)$ و $B(x_b; y_b; z_b)$ نقطتين من المستوى

إذن : $\overrightarrow{AB}(x_b - x_a; y_b - y_a; z_b - z_a)$

-المسافة بين نقطتين :

لتكن $A(x_a; y_a; z_a)$ و $B(x_b; y_b; z_b)$ نقطتين من المستوى

إذن :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$$

-الجداء السلمي :

لتكن $\vec{u}(x; y; z)$ و $\vec{v}(x'; y'; z')$ متجهتين في المستوى

إذن : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

-الجداء المتجهي :

لتكن $\vec{u}(x; y; z)$ و $\vec{v}(x'; y'; z')$ متجهتين في المستوى إذن

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{i}\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$
$$= \vec{i}(yz' - zy') - \vec{j}(xz' - zx') + \vec{k}(xy' - yx')$$

-معادلة ديكارتية لمستقيم :

ليكن (Δ) المستقيم المعرف بالمعادلة :

$$(\Delta) : ax + by + cz + d = 0$$

المتجهة $\vec{u}(a; b; c)$ هي المتجهة الموجهة لـ (Δ)

-معادلة بارمترية لمستقيم :

ليكن (Δ) المستقيم الموجه بـ $\vec{u}(a; b; c)$ و يمر من النقطة $A(x_0; y_0; z_0)$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

معادلة مستوي :

ليكن (P) المستوى المعرف بالمعادلة :

$$(P) : ax + by + cz + d = 0$$

المتجهة $\vec{n}(a; b; c)$ هي المتجهة المنضمية على (P)

مسافة نقطة عن مستقيم :

نعتبر المستقيم (Δ) المار من النقطة A و موجه بالمتجهة $\vec{u}$ و لتكن M نقطة من المستوى إذن :

$$d(M; (\Delta)) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

مسافة نقطة عن مستوي :

نعتبر المستوى (P) و النقطة M من الفضاء بحيث :

$$(P) : ax + by + cz + d = 0$$
$$M(x_M; y_M; z_M)$$

إذن :

$$d(M; (P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

معادلة فلكة :

لتكن (S) فلكة مركزها هو $\omega(a; b; c)$ و شعاعها r

إذن :

$$(S) : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

معادلة فلكة قطرها $[AB]$

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفلكة (S) إذن :

$$(S) : \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$$

تقاطع فلكة و مستوي :

لتكن (S) فلكة مركزها Ω و شعاعها R و (P) مستوى :

نحسب $d(\Omega; (P)) = d$

$d > R$	المستوى (P) لا يقطع الفلكة (S)
$d = R$	المستوى (P) مماس للفلكة (S)
$d < R$	المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة مركزها هو المسقط العمودي لـ Ω على (P) و شعاعها $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

حساب التكامل :

لتكن f دالة متصلة على المجال $I = [a; b]$ و لتكن F الدالة الأصلية للدالة f إذن : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

بعض خاصيات التكامل

1 – علاقة شال :

$$\forall c \in [a; b];\ \int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

2 – القيمة المتوسطة للدالة في المجال $[a; b]$ هي : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

حساب المساحات :

a) – المساحة المحصورة بين Cf و محور الأفاصيل و المستقيمين

$x = a$ و $x = b$ و $S = \int_a^b |f(x)|\,dx.ua$:

b) – المساحة المحصورة بين Cf و المستقيم $y = ax + b$ و المستقيمين

$x = a$ و $x = b$ و $S = \int_a^b |f(x) - (ax + b)|\,dx.ua$:

c – المساحة المحصورة بين Cf و محور الأراتيب و المستقيم $x = a$:

$$S = \int_0^a |f(x)|\,dx.ua \quad (a > 0)$$

أو

$$S = \int_a^0 |f(x)|\,dx.ua \quad (a < 0)$$

حساب الحجوم :

لتكن f دالة متصلة على المجال $I = [a; b]$

حجم المجسم المولد بدوران C_f دورة كاملة حول محور الأفاصيل في المجال $I = [a; b]$ هو : $V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx\,.uv$

المكاملة بالأجزاء :

لتكن f و g دالتين متصلتين و قابلتين للإشتقاق على المجال $I = [a; b]$ إذن :

$$\int_a^b f'(x).g(x)\,dx = [f.g]_a^b - \int_a^b g'.f\,dx$$

الدوال الأصلية :

الدالة f	الدالة الأصلية لـ f
a	ax
$x^r\ ;\ (r \neq -1)$	$\frac{1}{r+1} \times x^{r+1}$
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1} \times u^{n+1}$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
e^x	e^x
$u'e^u$	e^u
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$

الاحتمال :

لتكن Ω هو كون الإمكانيات .

و ليكن A حدث من Ω إذن إحتمال تحقق الحدث A هو :

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

أنواع السحب :

//السحب تاليا أو في آن واحد : $(C_n^p\ ;\ n \geq p)$

// السحب بالتتابع و بدون إهلال أو بدون إرجاع : ت.م $(A_n^p\ ;\ n \geq p)$

// السحب بالتتابع و بإهلال أو بإرجاع :ت.م (n^p)

الحدثين المنسجمين :

نقول أن الحدثين A و B غير منسجمين إذاكان : $A \cap B = \emptyset$

الحدثين المستقلين :

يكون الحدثين A و B مستقلين إذا كان :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

المتغير العشوائي :

ليكن X متغير عشوائي معرف على فضاء احتمالي منته ، إذن :

الأمل الرياضي : $E(X) = \sum x_i \times P(X = x_i)$

المغايرة : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

الإنحراف الطرازي : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

الإحتمال الشرطي :

1) – إحتمال الحدث B علما أن الحدث A محقق هو :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

2) – ليكن A و B حدثين بحيث :

$$P(A) \neq 0 \text{ et } P(B) \neq 0$$

إذن : $P(A \cap B) = P(A).P_A(B) = P(B).P_B(A)$

التوزيع الحدائي :

إذا كانت تجربة عشوائية تتكون من إعادة نفس الإختبار n مرة و A حدث من هذا الإختبار حيث : $P(A) = p$

فإن احتمال أن يتحقق الحدث A ، k مرة بالضبط هو :

$$C_n^p p^k (1-p)^{n-k}\ ;\ k \leq n$$

*. ليكن X متغير عشوائي وسطاه n و p إذن :

الأمل الرياضي هو : $E(X) = n.p$

المغايرة : $V(X) = n.p(1-p)$

الإنحراف الطرازي : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

النهايات الاعتيادية :

$\lim_{+\infty} \ln x = +\infty$	$\lim_{+\infty} e^x = +\infty$
$\lim_{0^+} \ln x = -\infty$	$\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
$\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	$\lim_{-\infty} e^x = 0$
$\lim_{0^+} x \ln x = 0$	$\lim_{-\infty} xe^x = 0$
$\lim_{0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	$\lim_{0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$	

قابلية الاشتقاق في نقطة :

تكون f قابلة للإشتقاق على اليمين في النقطة a إذا كان :

$$\lim_{a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}$$

تكون f قابلة للإشتقاق على اليسار في النقطة a إذا كان :

$$\lim_{a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}$$

معادلة المماس في النقطة التي أفصولها a هي :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

الإشتقاق :

الدالة f	مشتقة f
$U.V$	$U'.V+V'.U$
$\frac{U}{V}$	$\frac{U'.V - V'.U}{V^2}$
$\sqrt{U}$	$\frac{1}{2\sqrt{U}}$
g^n	$ng'g^{n-1}$
e^U	$U'e^U$
$\ln U$	$\frac{U'}{U}$

الدالة الزوجية :

تكون f دالة زوجية إذا كان :

$$\forall x \in D; -x \in D \text{ et } f(-x) = f(x)$$

الدالة الفردية :

تكون f دالة فردية إذا كان :

$$\forall x \in D; -x \in D \text{ et } f(-x) = -f(x)$$

مركز التماثل :

مركز تماثل C_f إذا كان : $\omega(a, b)$ هو

$$\forall x \in D; 2a - x \in D$$
$$\text{et} \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$$

محور التماثل :

$x = a$ هو محور تماثل C_f إذا كان :

$$\forall x \in D; 2a - x \in D$$
$$\text{et} \quad f(2a - x) = f(x)$$

بعض الأسئلة التي تطرح في المسألة و كيفية الجواب :

- بين أن المستقيم $y = ax + b$ مقارب مائل للمنحنى C_f بجوار ∞ .

$\Leftarrow$ نبين أن :

$$\lim_{\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

- إذا كان $\lim_a f(x) = \infty$ فإن المنحنى C_f يقبل مقارب عمودي معادلته $x = a$
- أدرس الوضع النسبي للمنحنى C_f و المستقيم $y = ax + b$.

$\Leftarrow$ نحسب $f(x) - (ax + b)$ و نحدد الإشارة

- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[a; b]$.

$\Leftarrow$ نبين أن الدالة f متصلة و رتيبة على المجال $[a; b]$ و نبين أن $f(a).f(b) \leq 0$

- حدد نقطة إنعطاف المنحنى C_f .

$\Leftarrow$ نحسب $f''(x)$ ثم نحل المعادلة $f''(x) = 0$ و نكتب : بما أن $f''(x)$ تنعدم و تغير الإشارة فإن C_f يقبل نقطة انعطاف

- بين أن h تقابل من المجال I نحو المجال J .

$\Leftarrow$ نبين أن h متصلة و رتيبة قطعا على I و نحسب $J = f(I)$

الفروع اللانهائية :

$$\lim_{\infty} f(x) = \infty$$

نحسب

$$\lim_{\infty} \frac{f(x)}{x} =$$

∞	0	a
C_f يقبل فرع شلجمي بإتجاه محور الأراتيب بجوار ∞	C_f يقبل فرع شلجمي بإتجاه محور الأفاصيل بجوار ∞	نحسب : $\lim_{\infty} f(x) - ax$ C_f يقبل فرع شلجمي بإتجاه المستقيم ذو المعادلة : $y = ax$ بجوار ∞ C_f يقبل مقارب مائل معادلته $y = ax + b$ بجوار ∞

إذا كان $\lim_{\infty} f(x) = a$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = a$ مقارب أفقي بجوار ∞

إذا كان $\lim_a f(x) = \infty$ فإن المستقيم ذو المعادلة $x = a$ مقارب عمودي بجوار ∞

P.SALAH FARHANE
Tel : 0619652880