**تصحيح الامتحان الوطني الموحد 22 يونيو 2011**
**علوم رياضية أ و ب**
**ذ.محمد العباسي – نيابة خريبكة**
**elmed2006@yahoo.fr**


## التمرين الأول

### الجزء الأول

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**1- لنبين بالترجع أن** $A^{2k}=I$ $(\forall k\in\mathbb{N})$.

**من أجل** $k=0$ **لدينا** $A^{2.0}=A^0=I$

**ليكن** $k\in\mathbb{N}$ **، نفترض أن** $A^{2k}=I$ **، لنبين أن** $A^{2(k+1)}=I$ **. لدينا :**

$$A^{2(k+1)}=A^{2k}.A^2=I.A^2 \qquad (A^{2k}=I \ par\ H.R)$$
$$=A^2=I$$

**2- بما أن** $A^2=I$ **أي** $A.A=I$ **فإن** $A$ **تقبل مقلوبا هو** $A$ **نفسها.**

### الجزء الثاني

$a\in\mathbb{R}$

$$\forall(x,y)\in I=]a,+\infty[ \quad x*y=(x-a)(y-a)+a$$

**1) أ. لنبين أن * قانون تركيب داخلي في** $I$ **:**

**ليكن** $x$ **و** $y$ **عنصرين من** $I$ **، بما أن** $x\rangle a$ **و** $y\rangle a$ **فإن** $x-a\rangle 0$ **و** $y-a\rangle 0$ **ومنه** $(x-a)(y-a)+a\rangle a$ **أي** $x*y\in I$ **وبما أن**

$$(x,y)=(x',y')\Leftrightarrow x=x' \ et\ y=y'$$
$$\Rightarrow (x-a)(y-a)+a=(x'-a)(y'-a)+a$$
$$\Leftrightarrow x*y=x'*y'$$

**فإن * قانون تركيب داخلي في** $I$ **.**

**ب. لنبين أن * تبادلي و تجميعي : ليكن** $x$ **و** $y$ **عنصرين من** $I$ **، لدينا :**

$$x*y=(x-a)(y-a)+a=(y-a)(x-a)+a \quad \text{(لأن الضرب تبادلي في } \mathbb{R}\text{)}$$
$$= \quad y*x$$

**إذن * تبادلي.**

**ليكن** $x$ **و** $y$ **و** $z$ **ثلاث عناصر من** $I$ **، لدينا :**

**(لأن الضرب تجميعي في** $\mathbb{R}$ **)**

$$(x*y)*z=\left[(x*y)-a\right]\left[z-a\right]+a=\left[\left((x-a)(y-a)\right)(z-a)\right]+a=\left[(x-a)\left((y-a)(z-a)\right)\right]+a$$
$$=\left[(x-a)\left((y*z)-a\right)\right]+a=x*(y*z)$$

**إذن * تجميعي.**

**ج- لنبين أن** $(I,*)$ **يقبل عنصرا محايدا.**

**ليكن** $e$ **عنصرا من** $I$ **، لدينا:**

$e$ **هو العنصر المحايد بالنسبة ل*في** $I$ $\Leftrightarrow (\forall x\in I)x*e=x$

$$\Leftrightarrow (\forall x\in I)\ (x-a)(e-a)+a=x$$
$$\Leftrightarrow (\forall x\in I)\ (x-a)\left(e-(a+1)\right)=0$$
$$\Leftrightarrow e=a+1$$

وبما أن $a+1\rangle a$ فإن $a+1\in I$ وبالتالي $a+1$ هو العنصر المحايد ل* في $I$ .

ج- لنبين أن $(I,*)$ زمرة تبادلية.

بما أن * تبادلي و تجميعي ويقبل عنصرا محايدا في $I$ هو $a+1$ بقي أن نبين أن كل عنصر من $I$ يقبل مماثلا بالنسبة ل* في $I$. ليكن $x$ و $y$ عنصرين من $I$.

$y$ هو مماثل $x$ بالنسبة ل* $\Leftrightarrow x*y=a+1$

$$\Leftrightarrow (x-a)(y-a)+a=a+1$$
$$\Leftrightarrow (x-a)(y-a)=1$$
$$\Leftrightarrow y-a=\frac{1}{x-a}\ (x\neq a)$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{x-a}+a$$

وبما أن $\frac{1}{x-a}\rangle 0$ لأن $x\rangle a$ فإن $\frac{1}{x-a}+a\in I$ وبالتالي $\frac{1}{x-a}+a$ هو مماثل $x$ بالنسبة ل* في $I$ .

خلاصة: $(I,*)$ زمرة تبادلية.

-3

$$\varphi: I\to\mathbb{R}_+^*$$
$$x\to\frac{1}{x-a}$$

أ- لنبين أن $\varphi$ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$

ليكن $x$ و $y$ عنصرين من $I$ ، لدينا :

$$\varphi(x*y)=\frac{1}{(x-a)(y-a)}=\frac{1}{x-a}\times\frac{1}{y-a}=\varphi(x)\times\varphi(y)$$

إذن $\varphi$ تشاكل من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

لنبين أن $\varphi$ تقابل من $I$ نحو $\mathbb{R}_+^*$ ، ليكن $y\in\mathbb{R}_+^*$ و $x\in I$ لدينا:

$$\varphi(x)=y\Leftrightarrow\frac{1}{x-a}=y$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}+a$$

وبما أن $y\rangle 0$ فإن $\frac{1}{y}+a\rangle 0$ وبالتالي فلكل $y\in\mathbb{R}_+^*$ المعادلة $\varphi(x)=y$ تقبل حلا وحيدا في $I$ هو $\frac{1}{y}+a$

إذن $\varphi$ تقابل من $I$ نحو $\mathbb{R}_+^*$.

ب- بما أن $\varphi$ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ فإن: $x^{(3)}=a^3+a\Leftrightarrow\varphi\left(x^{(3)}\right)=\varphi\left(a^3+a\right)$

$$\Leftrightarrow\left(\varphi(x)\right)^3=\varphi\left(a^3+a\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x-a}\right)^3=\left(\frac{1}{a}\right)^3$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{x-a}=\frac{1}{a}\quad\left(\frac{1}{x-a}\rangle 0\ et\ \frac{1}{a}\rangle 0\right)$$
$$\Leftrightarrow x=2a$$

وبماأن $2a\in I$ فإن المعادلة المقترحة تقبل حلا وحيدا في $I$ هو $2a$ .

## التمرين الثاني

$N = 111...1$ ( 2010 مرة 1)

1) لنبين أن $N$ يقبل القسمة على 11، لدينا $N = 10^{2009} + 10^{2008} + ... + 10^1 + 10^0$

وبما أن $10 \equiv -1[11]$ فإن

$$\begin{aligned} N &\equiv (-1)^{2009} + (-1)^{2008} + ... + (-1)^1 + (-1)^0 \, [11] \\ &\equiv -1+1-1+1+...-1+1 \, [11] \\ &\equiv 0 \, [11] \end{aligned}$$

( بما أن 2010 زوجي فالعدد 1 يتردد بقدر العدد1- في المجموع ).

2) أ- لنتحقق أن 2011 أولي.

لدينا $\sqrt{2011} \approx 44,..$ إذن الأعداد الأولية الأصغر من أو تساوي $\sqrt{2011}$ هي $2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43$ .

وبما أن 2011 لا يقبل القسمة على أي من هذه الأعداد فإنه أولي.

لنتحقق أن $10^{2010} - 1 = 9N$.

لدينا :

$$\begin{aligned} 10^{2010} - 1 &= (10-1)\left(10^{2009} + 10^{2008} + ...10^1 + 10^0\right) \\ &= 9N \end{aligned}$$

ب- لنبين أن 2011 يقسم $9N$، لدينا 2011 أولي و $2010 \wedge 2011 = 1$ ( عددين طبيعيين متتابعين) ومنه حسب مبرهنة فيرما:

$10^{2011-1} \equiv 1[2011]$ أي $10^{2010} - 1 \equiv 0[2011]$ وبما أنه حسب السؤال السابق $10^{2010} - 1 = 9N$ فإن $9N \equiv 0[2011]$

أي $2011/9N$.

ج- بما أن $2011/9N$ و $2011 \wedge 9 = 1$ ( لأن $1 = 4 \times 503 + 2011 \times (-1)$ ) فإنه حسب مبرهنة كوص $2011/N$.

3- لنبين أن $22121/N$ ، بما أن $2121 = 11 \times 2011$ و $2011/N$ و $11/N$ و $2011 \wedge 11 = 1$ ( لأن $1 = 11 \times (-914) + 5 \times 2011$ )

فإن $22121/N$ .

## التمرين الثالث

### الجزء الأول

$m \in \mathbb{C}^*$ نعتبر المعادلة : $(E_m) : z^2 + [(1-i)m - 4]z - im^2 - 2(1-i)m + 4 = 0$

1- لنتحقق أن $z_1 = -m + 2$ حل ل $(E_m)$ .

لدينا

$$\begin{aligned} &(-m+2)^2 + [(1-i)m-4](-m+2) - im^2 - 2(1-i)m + 4 \\ &= 4 - 4m + m^2 - m^2(1-i) + 4m + 2(1-i)m - 8 - im^2 - 2m + 2im + 4 = 0 \end{aligned}$$

إذن $z_1 = -m + 2$ حل ل $(E_m)$ .

2- ليكن $z_2$ الحل الثاني

ا- لنبين أن $z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$

بما أن $z_1$ و $z_2$ هما جذري المعادلة $(E_m)$ فإن $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-im^2 - 2(1-i)m + 4}{1} = -im^2 - 2(1-i)m + 4$

إذن $z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$.

ب- لدينا:

$$z_1z_2=1\Leftrightarrow im^2+2(1-i)m-3=0$$
$$\Leftrightarrow\left[(1-i)m-2\right]^2=-2$$
$$\Leftrightarrow(1-i)m-2=i\sqrt{2}\ \ ou\ \ (1-i)m-2=-i\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow m=\frac{2+i\sqrt{2}}{1-i}\ \ ou\ \ m=\frac{2-i\sqrt{2}}{1-i}$$
$$\Leftrightarrow m=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i\ \ ou\ \ m=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$$

## <u>الجزء الثاني</u>

$$S(M(z))=M'(z')\ \Leftrightarrow\ z'-1=-(z-1)$$
$$R(M(z))=M''(z'')\ \Leftrightarrow\ z''-(1+i)=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-(1+i))\ \ ،\ \ R=r\left(\Omega(1+i),\frac{\pi}{2}\right)$$

**1) أ- لنبين أن** $S$ **هو التماثل المركزي الذي مركزه** $I(1)$

**لدينا** $S(M(z))=M'(z')\ \Leftrightarrow\ z'-1=-(z-1)$
$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{IM'}=-\overrightarrow{IM}$$
**وبالتالي** $S=S_I$.

**ب- لنبين أن** $z''=iz+2$

**لدينا :**
$$R(M(z))=M''(z'')\ \Leftrightarrow\ z''-(1+i)=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-(1+i))$$
$$\Leftrightarrow z''=1+i+i(z-(1+i))$$
$$\Leftrightarrow z''=iz+2$$

**-2** $M\neq O$ **و** $A(2)$

**أ- لدينا:** $\dfrac{z''-2}{z'-2}=\dfrac{iz}{-z}=-i$

**لدينا** $$\frac{z''-2}{z'-2}=-i\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}AM''=AM'\\ \left(\overline{\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{AM''}}\right)\equiv-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$$

**وبالتالي المثلث** $AM'M''$ **متساوي الساقين وقائم الزاوية في** $A$.

**ب-** $A$ **و** $\Omega$ **و** $M'$ **و** $M''$ **متداورة** $\Leftrightarrow\ \dfrac{z_{M'}-z_\Omega}{z_{M''}-z_\Omega}\div\dfrac{z_{M'}-z_A}{z_{M''}-z_A}\in\mathbb{R}$
$$\Leftrightarrow\frac{-z+1-i}{iz+1-i}\div\frac{-z}{iz}\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow\frac{-z+1-i}{-z+i+1}\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow\frac{-z+1-i}{-z+i+1}=\overline{\left(\frac{-z+1-i}{-z+i+1}\right)}$$
$$\Leftrightarrow z+\bar{z}-2=0$$
$$\Leftrightarrow x=1$$
**نضع** $z=x+iy$ **حيث** $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

**وبالتالي مجموعة النقط** $M(z=x+iy)$ **بحيث** $A$ **و** $\Omega$ **و** $M'$ **و** $M''$ **متداورة هي المستقيم ذو المعادلة** $x=1$.

## التمرين الرابع

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\ln x} & si\ \ x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}\\ 0 & si\ \ x=0\end{cases}$$

**-1 لدينا :**

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}\right)\quad e^x=x^n \;\Leftrightarrow\; e^x=e^{n\ln x}$$
$$\Leftrightarrow x=n\ln x$$
$$\Leftrightarrow n=f(x)$$

**-2 لدينا :**

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\ln x}=0\in\mathbb{R}$$

**إذن** $f$ **قابلة للاشتقاق على اليمين عند** $0$ **و** $f'_d(0)=0$

**-3** $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{\ln x}=-\infty$ **و** $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{\ln x}=+\infty$ **( لأن** $\lim\limits_{x\to1^+}\ln x=0^+$ **و** $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x=0^-$ **)**

**إذن** $(C)$ **يقبل المستقيم ذو المعادلة** $x=1$ **كمقارب عمودي بجوار** $1$.

**و** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{\ln x}{x}}=+\infty$ **( لأن** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0^+$ **)**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}=0$ **( لأن** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ **)**

**إذن** $(C)$ **يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار** $+\infty$ **.**

**-4 لدينا** $f$ **قابلة للاشتقاق على كل من المجالين** $]0,1[$ **و** $]1,+\infty[$ **( خارج دالتين قابلتين للاشتقاق) ولدينا**

$\left(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\right)\ f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$ **وبالتالي فإشارة** $f'(x)$ **هي نفس إشارة** $\ln x-1$

**إذن** $f$ **تناقصية قطعا على كل من المجالين** $]0,1[$ **و** $]1,e]$ **و تزايدية قطعا على المجال** $[e,+\infty[$

**جدول تغيرات** $f$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | ‖ | - | $0$ | + | |
| $f(x)$ | **0** | ↘ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $e$ | ↗ | $+\infty$ |

**-5 لدينا** $\left(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\right)\ f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{(\ln x)^2}$

**لدينا الدالة** $f'$ **ق.ش على كل من المجالين** $]0,1[$ **و** $]1,+\infty[$ **( لأن الدالة** $\ln$ **ق.ش ولا تنعدم على كل من المجالين** $]0,1[$ **و** $]1,+\infty[$ **)**

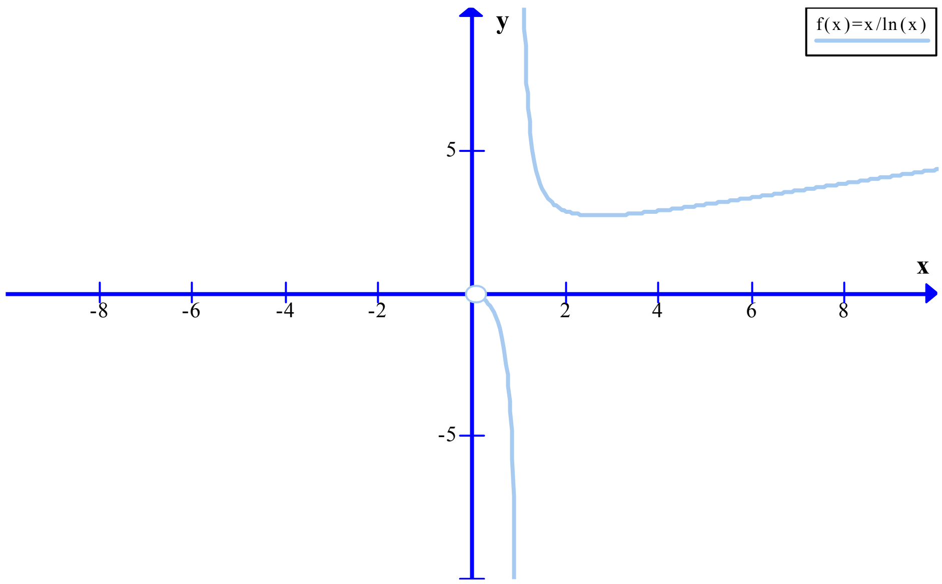
**ولدينا** $\left(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\right)\ f''(x)=-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}+\dfrac{2\frac{1}{x}\ln x}{(\ln x)^4}=\dfrac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}$

**جدول تقعر** $(C)$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e^2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $(C)$ | | | ‖ | | Pt d'inflexion | | |

من خلال الجدول أعلاه نستنتج أن $(C)$ يقبل نقطة انعطاف عند النقطة ذات الاحداثيات $\left(e^2,\dfrac{e^2}{2}\right)$.

**6- انشاء** $(C)$: سهل جدا ، اترك مسألة إتمامه للقارئ الكريم




**7- ليكن** $n\geq 3$ ، لنبين أن المعادلة $(E)$ تقبل على مجموعة تعريفها بالضبط حلين $a_n$ و $b_n$ بحيث $1<a_n<e<b_n$ .

بما أن $(\forall x\in[0,1[)\ f(x)\leq 0$ و $n\geq 3$ فإن المعادلة لاتقبل أي حل في المجال $[0,1[$ ، على المجال $]1,e]$ الدالة متصلة وتناقصية قطعا إذن فإنها تقابل من المجال $]1,e]$ نحو المجال $[e,+\infty[$ وبما أن $f(]1,e[)=]e,+\infty[$ و $n\in]e,+\infty[$ فإنه $(\exists! a_n\in]1,e[)/ f(a_n)=n$ على المجال $]e,+\infty[$ الدالة متصلة وتزايدية قطعا إذن فإنها تقابل من المجال $]e,+\infty[$ نحو المجال $]e,+\infty[$ وبما أن $f(]e,+\infty[)=]e,+\infty[$ و $n\in]e,+\infty[$ فإنه $(\exists! b_n\in]e,+\infty[)/ f(b_n)=n$ ولدينا $f(e)=e<n$ ، إذن المعادلة $(E)$ تقبل على مجموعة تعريفها بالضبط حلين $a_n$ و $b_n$ بحيث $1<a_n<e<b_n$ .

## الجزء الثاني

**1- لنبين أن** $(\forall n\geq 3)\ b_n\geq n$

ليكن $n\geq 3$ ، لدينا $b_n-n=b_n-f(b_n)=b_n-\dfrac{b_n}{\ln b_n}=b_n\left(\dfrac{\ln b_n-1}{\ln b_n}\right)$

وبما أن $b_n>e$ فإن $b_n\left(\dfrac{\ln b_n-1}{\ln b_n}\right)>0$ ومنه $b_n-n>0$ أي $b_n>n$.

بما أنه $(\forall n\geq 3)\ b_n\geq n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=+\infty$ .

**2)أ- لنبين أن** $(a_n)_{n\geq 3}$ تناقصية

ليكن $n\geq 3$ ، لدينا $f(a_n)=n$ و $f(a_{n+1})=n+1$ وبما أن $n<n+1$ فإن $f(a_n)<f(a_{n+1})$ وبما $a_n$ و $a_{n+1}$ عنصرين من $]1,e[$ و $f$ تناقصية قطعا على $]1,e[$ فإن $a_{n+1}<a_n$ وبالتالي المتتالية $(a_n)_{n\geq 3}$ تناقصية قطعا.

بما أن $(a_n)_{n\geq 3}$ تناقصية ومصغورة ب **1** فإنها متقاربة.

ب- لنبين أن $\frac{1}{n}\langle \ln(a_n)\langle \frac{e}{n}$ $(\forall n\ge 3)$

ليكن $n\ge 3$ ، لدينا $\ln a_n=\frac{a_n}{n} \Leftrightarrow \frac{a_n}{\ln a_n}=n \Leftrightarrow f(a_n)=n$ وبما أن $1\langle a_n\langle e$ فإن $\frac{1}{n}\langle \ln(a_n)\langle \frac{e}{n}$.

بما أن $\frac{1}{n}\langle \ln(a_n)\langle \frac{e}{n}$ $(\forall n\ge 3)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e}{n}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln a_n=0$ وبما أن الدالة $\exp$ متصلة عند $0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\exp(\ln a_n)=\exp(0)$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$ .

ج- لنبين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)^n=1$

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{n\ln(a_n)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\exp(a_n)=\exp(1)=e$ ( لان $n\ln a_n=a_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$ والدالة $\exp$ متصلة عند $1$)

## التمرين الخامس

$$(\forall x\in[0,+\infty[)\quad F(x)=e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

1)أ- لنبين أن $(\forall x\ge 0)\quad 0\le F(x)\le xe^{-x^2}$

بماأن $(\forall x\ge 0)(\forall t\in[0,x])\quad -x^2\le -t^2\le 0$ والدالة $\exp$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ فإن $(\forall x\ge 0)(\forall t\in[0,x])\quad e^{-x^2}\le e^{-t^2}\le 1$

إذن $(\forall x\ge 0)\quad \int_0^x e^{-x^2}dt\le\int_0^x e^{-t^2}dt\le\int_0^x 1dt$ أي $(\forall x\ge 0)\quad xe^{-x^2}\le\int_0^x e^{-t^2}dt\le x$ وبما أن $(\forall x\ge 0)\quad e^{-x^2}\ge 0$ فإن

$(\forall x\ge 0)\quad 0\le F(x)\le xe^{-x^2}$

ب- لنبين أن $(\forall x\ge 1)\quad e^{-x^2}\le e^{-x}$

بما أنه $(\forall x\ge 1)\quad -x^2\le -x$ والدالة $\exp$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ فإن $(\forall x\ge 1)\quad e^{-x^2}\le e^{-x}$

بما أنه $(\forall x\ge 1)\quad e^{-x^2}\le e^{-x}$ و $(\forall x\ge 1)\quad x\rangle 0$ فإنه $(\forall x\ge 1)0\langle xe^{-x^2}\le xe^{-x}$ وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x^2}=0$

وبما أن $(\forall x\ge 0)\quad 0\le F(x)\le xe^{-x^2}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$ .

2) بما أن الدالة : $t\to e^{-t^2}$ متصلة على $\mathbb{R}$ وعلى الخصوص على $[0,+\infty[$ فإن الدالة $\varphi: x\to\int_0^x e^{-t^2}dt$ قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$

وبالتالي $F$ قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ كجداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $[0,+\infty[$. ولدينا

$$(\forall x\ge 0)F'(x)=\left(e^{-x^2}G(x)\right)'=\left(e^{-x^2}\right)'\varphi(x)+e^{-x^2}\varphi'(x)=-2xe^{-x^2}\varphi(x)+e^{-x^2}e^{-x^2}=e^{-2x^2}-2xF(x)$$

(3

$$\left(\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)\quad G(x)=\begin{cases}F(\tan x)\ ,\ si\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ 0\ ,\ si\ x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

أ- لنبين أن $G$ متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\tan(x)=+\infty$ وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$ فإن $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}G(x)=0=G\left(\frac{\pi}{2}\right)$ وبالتالي $G$ متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$.

ب- لنبين أن $F'(c)=0$ / $(\exists c\in]0,+\infty[)$

من أجل ذلك نطبق مبرهنة رول على $G$ في المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

لدينا $G$ متصلة على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ (على التوالي ق.ش على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ ) ( لأن الدالة $\tan$ متصلة على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ و $[0,+\infty[$ = $\tan\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$

والدالة $F$ متصلة على $[0,+\infty[$ ) ( على التوالي ق.ش على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ و $\tan\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=]0,+\infty[$ والدالة $F$ ق.ش على $]0,+\infty[$ )

ولدينا $G$ متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$ و $G(0)=G\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ إذن حسب مبرهنة رول $\left(\exists c_1\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)\ /\ G'(c_1)=0$

وبما أن $G'(x)=F'(\tan x).\frac{1}{1+x^2}$ فإن $F'(\tan c_1)=0$ وبالتالي $(\exists c\in]0,+\infty[)\ /\ F'(c)=0$ يكفي أن نأخذ $c=\tan c_1$.

بما أن $(\forall x\geq 0)\ F'(x)=e^{-2x^2}-2xF(x)$ فإن $F'(c)=0\Leftrightarrow e^{-2c^2}=2cF(c)\Leftrightarrow F(c)=\frac{1}{2c}e^{-c^2}$.

-4 $(\forall x\in]0,+\infty[)\ H(x)=F'(x)\frac{e^{x^2}}{2x}$

أ- لنبين أن $H$ تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$

بما أن $(\forall x\rangle 0)\ F'(x)=e^{-2x^2}-2xF(x)$ فإن $(\forall x\rangle 0)\ H(x)=\frac{1}{2x}e^{-x^2}-e^{x^2}F(x)=\frac{1}{2x}e^{-x^2}-\varphi(x)$

لدينا الدالة $x\to\frac{1}{2x}e^{-x^2}$ تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ كجداء دالتين تناقصيتين قطعا وموجبتين قطعا على $]0,+\infty[$ والدالة $-\varphi$ تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ ( لان $(\forall x\in]0,+\infty[)\ (-\varphi)'(x)=-e^{x^2}\langle 0$ )وبالتالي الدالة $H$ تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ ( كمجموع دالتين تناقصيتين قطعا على $]0,+\infty[$ ).

ب- نلاحظ أن $F'(c)=0\Leftrightarrow H(c)=0$ وبما أن $H$ تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ فإن المعادلة $H(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $]0,+\infty[$ وبالتالي فالعدد $c$ وحيد. إشارة $F'(x)$ هي نفس إشارة $H(x)$ وبما أن $H$ تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ و $H(c)=0$ فإن $(\forall x\in]0,c[)\ H(x)\rangle 0$ و $(\forall x\in]c,+\infty[)\ H(x)\langle 0$ وبالتالي نستنتج الجدول التالي:

<u>جدول تغيرات</u> $F$

| $x$ | $0$ | | $c$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $F(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $F(c)$ | $\searrow$ | $0$ |

**مرحبا بأي ملاحظة أو اقتراح وشكرا**

**ذ.محمد العباسي**

**elmed2006@yahoo.fr**