

السقوط الرأسي لجسم صلب

I - مجال الثقالة

تعريف

كل جسم موجود على سطح الأرض أو في الحيز المحيط بها يخضع لقوة مطبقة من طرف الأرض تسمى بوزن الجسم ونرمز لها ب \vec{P} . هذه القوة هي ناتجة عن المجال المحدث من طرف الأرض يسمى بمجال الثقالة ونرمز له ب \vec{g}

العلاقة بين \vec{P} و \vec{g} هي : $\vec{g} = \frac{1}{m} \vec{P}$ حيث m كتلة الجسم .

مميزات متجهة مجال الثقالة :

- الاتجاه : الرأسي المار من مركز قصور الجسم .

- المنحى : نحو الأرض

- المنظم : شدة مجال الثقالة ونعبر عنها بالوحدة N/kg^{-1}

ملحوظة : تتعلق شدة مجال الثقالة بالارتفاع وبخط العرض .

II - القوى المطبقة من طرف مائع .

1- قوى الاحتكاك المائع

كل جسم في حركة داخل مائع فإنه يخضع إلى قوى احتكاك مطبقة عليه من طرف هذا الأخير . تكافئ هذه القوى المطبقة من طرف المائع على الجسم المتحرك ، قوة وحيدة تسمى قوة الاحتكاك المائع

مميزات قوة الاحتكاك المائع :

الأصل : مركز قصور الجسم

خط تأثيرها هو اتجاه متجهة سرعة مركز القصور G للجسم

المنحى : عكس منحى متجهة مركز قصور الجسم

الشدة : تتعلق بشكل الجسم وبأبعاده ، وبحالة سطحه ، وتعلق كذلك بلزوجة المائع وبسرعة الجسم المتحرك بالنسبة للمائع .

نمذج شدتها بالعلاقة التالية : $f = k.v_G^n$ حيث k ثابتة تتعلق بطبيعة المائع وبشكل الجسم الصلب

نضع $v_G = v$ ، فتصبح العلاقة $f = k.v^n$.

ملحوظة : عندما تكون قيمة السرعة صغيرة ، نأخذ $n=1$ ، فتصبح العلاقة السابقة كالآتي : $f = k.v$ ،

في هذه الحالة تتعلق k بلزوجة المائع .

عندما تكون قيمة السرعة v كبيرة ، نأخذ $n=2$ تصبح العلاقة السابقة $f = k.v^2$ في هذه الحالة ،

لاتتعلق k بلزوجة المائع ، بل تتعلق بكتلته الحجمية.

2 - دافعة أرخميدس

يخضع كل جسم مغمور كلياً أو جزئياً في مائع لقوى تماس ضاغطة مطبقة على سطح الجسم ، يسمى مجموع هذه القوى بدافعة أرخميدس .

مميزاتها هي :

- نقطة تأثيرها : مركز ثقل المائع المزاح

- الاتجاه : الخط الرأسي

- المنحى : نحو الأعلى

- الشدة : تساوي شدة وزن الحجم المزاح للمائع : $\vec{F}_A = -\rho_f.V.\vec{g}$

بحيث أن ρ_f الكتلة الحجمية للمائع ب kg/m^3

V الحجم المزاح للمائع (m^3)

g : شدة مجال الثقالة (N/kg) أو m/s^2

F_A شدة دافعة أرخميدس (N)

ملحوظة : $\vec{F}_A = -\vec{P}_f$ ، هي وزن الحجم المزاح .

نبين أن $\frac{\vec{F}_A}{P_s} = \frac{\rho_f}{\rho_s}$ حيث P_s هو وزن الجسم الصلب المغمور في المائع و ρ_s كتلته الحجمية .

إذا كانت ρ_f أصغر بكثير من ρ_s فإن F_A تصغر بكثير من P_s هذه الحالة نجدها عندما يكون المائع غليزيا .

III - السقوط الرأسي باحتكاك النشاط التجريبي

الهدف من التجربة : نمذجة حركة سقوط كرية في مائع بطريقة أولير

العدة التجريبية : مخبار مدرج من فئة 1l . محلول الغليسيرول المخفف كتلته الحجمية

$\rho_f = 1,07 \text{ g/ml}$ ، كرية فولاذية كتلتها $m_b = 6,88 \text{ g}$ وشعاعها $R = 5,9 \text{ mm}$ نسجل حركة الكرية في

السائل بواسطة كاميرا رقمية ونحفظ الشريط المسجل لحركة الكرية في ملف من نوع (avi) .

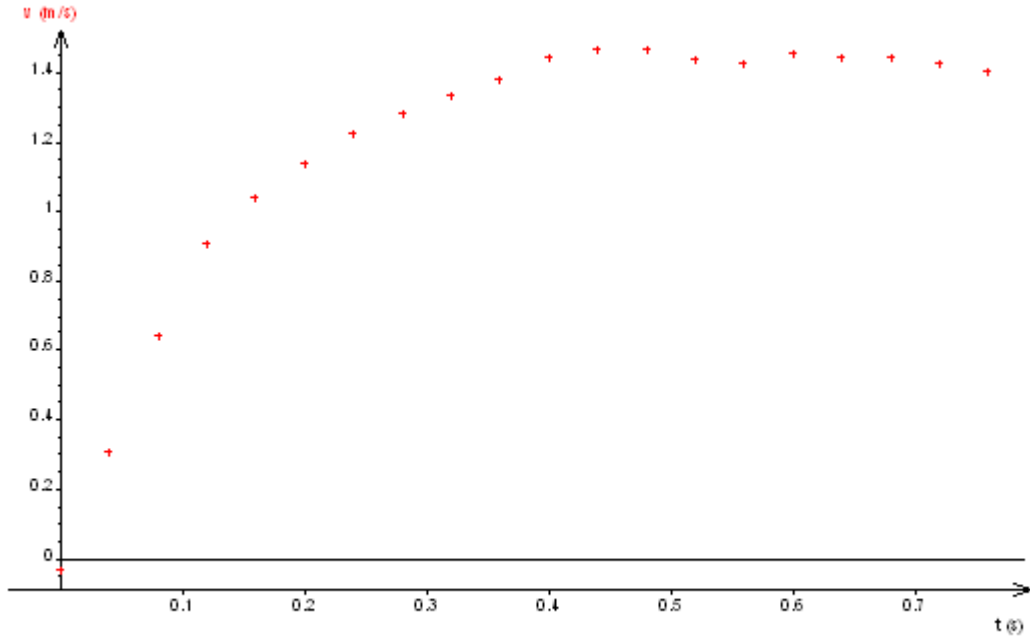
نستعمل برزم أفيمكا Avimeca لعملية تحديد مواضع النقط الموافقة لمواضع G مركز قصور الكرية خلال

سقوطها مع اختيار محور رأسي موجه نحو الأسفل فنكتب قيم الأزواج (t,y) .

نرسل جدول القياس إلى برزم المجدول وراسم المنحنيات regressi ، وبعد تعريف إحداثية متجهة

السرعة \vec{v}_G وهي $v = \frac{dy}{dt}$ ، يقوم البرزم بحساب قيم v ثم رسم منحنى تغيرات v بدلالة الزمن t على

الشاشة ، ثم نحفظ الملف .



منحنى تغير سرعة مركز قصور الكرية خلال
سقوطها في سائل الغليسيرول مخفف

استثمار

1 - استغلال المنحنى $v=f(t)$

أ - يبرز المنحنى وجود نظامين ، حدد مبيانيا المجال الزمني لكل نظام مبرزا طبيعة حركة G مركز قصور الكرية في كل نظام .

ب - هل تتزايد أم تتناقص متجهة التسارع \vec{a}_G مركز قصور الكرية خلال الحركة ؟ علل جوابك .

ج - مثل على الشكل الخط المقارب للمنحنى .

يمثل نقطة تقاطع هذا الخط مع محور السرعات قيمة السرعة الحدية v_ℓ . حدد قيمة v_ℓ .
 د - مثل في نفس المنحنى ، المماس للمنحنى عند الأصل O . يتقاطع هذا المماس على الخط المقارب في نقطة أفصولها τ نسميه الزمن المميز . عين قيمة τ .
 ه - ما قيمة a_0 لإحداثية \vec{a}_0 على المحور الرأس عند اللحظة $t=0$ ؟

2 - الدراسة النظرية

أ - أذكر مرجعا يمكن اعتماده في دراسة حركة G مركز قصور الكرة .
 ب - أثنا سقوط الكرة ، ما هي القوى المطبقة عليها . حدد مميزات كل القوى المطبقة على الكرة .
 حدد من بين القوى الثلاث ، القوة التي تتغير شدتها خلال النظام البدئي .
 ج - بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكرة أثناء سقوطها الرأسي في المائع في مرجع تحده ، أكتب العلاقة التي تربط بين مجموع القوى الخارجية المطبقة على الكرة و m كتلة الكرة و متجهة التسارع لمركز قصور الجسم \vec{a}_G .

د - بإسقاط هذه العلاقة على المحور (O, \vec{k}) الرأسي الموجه نحو الأسفل ، أثبت العلاقة التالية :

$$(1) \frac{dv}{dt} = A - Bv^n$$

عبر عن A و B بدلالة m و k و F_A و g شدة الثقالة .

ه - بين أن سرعة G تبلغ قيمة حدية v_ℓ ، واعط تعبير v_ℓ بدلالة A و B و n .

و - أثبت أن العلاقة (1) تكتب على النحو التالي :

$$(2) \frac{dv}{dt} = A \left(1 - \left(\frac{v}{v_\ell} \right)^n \right)$$

ز - أوجد التعبير الحرفي للإحداثية a لمتجهة التسارع \vec{a}_G على المحور (O, \vec{k}) في اللحظة $t=0$

1 - المعادلة التفاضلية للحركة

دراسة حركة كرة كتلتها m و حجمها V وكتلتها الحجمية ρ_{bille} في مائع كتلته الحجمية ρ_{fluide} في حالة سكون بالنسبة للجسم المرجعي الأرضي .

بما أم حركة الكرة رأسية ومنحاه نحو الأسفل ، نختار كمعلم متعامد و ممنظم موجه نحو الأسفل (O, \vec{k}) .

- المجموعة المدروسة : الكرة

- جرد القوى المطبقة الخارجية خلال سقوطها :

$$\vec{P} : \text{وزن الكرة} , \vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

$$\vec{F}_A : \text{دافعة أرخميدس} : \vec{F}_A = -m_f \cdot \vec{g} = -\rho_f \cdot V \cdot \vec{g}$$

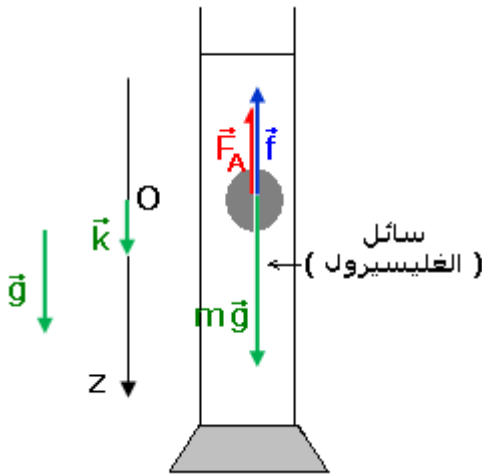
$$\vec{f} : \text{قوة الاحتكاك المائع} : \vec{f} = -k \cdot v^n \cdot \vec{k}$$

- نطبق القانون الثاني لنيوتن :

$$\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m_{bille} \cdot \vec{a}_G$$

حيث أن $\vec{a}_G = \vec{a}$ متجهة التسارع لمركز قصور الكرة

نسقط العلاقة المتجهية على المحور (O, \vec{k}) ، نحصل على المتساوية التالية :



$$m_{bille}g - m_f g - kv^n = m_{bille} \cdot a$$

$$(m_b - m_f)g - kv^n = m_b \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$A = \frac{(m_b - m_f)}{m_b} g \quad B = \frac{k}{m_b}$$

$$\frac{dv}{dt} = A - Bv^n$$

تمثل هذه المعادلة ، المعادلة التفاضلية لحركة G مركز قوس الكرة خلال السقوط الرأسي في السائل

2 - تحديد المقادير المميزة للحركة

أ - النظام الدائم : السرعة الحدية للكرة

تبين التجربة أن متجهة السرعة للكرة تتناهي إلى قيمة حدية ، تسمى بالسرعة الحدية للكرة v_ℓ

بحيث تصبح حركة الكرة حركة مستقيمة منتظمة أي أن : $\frac{dv}{dt} = 0$

في المعادلة التفاضلية للحركة نستنتج :

$$A - Bv_\ell^n = 0 \Rightarrow v_\ell = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$v_\ell = \left(\frac{g}{k}(m_b - m_f)\right)^{\frac{1}{n}}$$

- عندما تقارب سرعة الكرة السرعة الحدية v_ℓ تخضع حركة G إلى نظام يسمى **النظام الدائم** ويتميز بثبات السرعة .

ب - النظام البدئي

قبل تحرير الكرة فهي تخضع إلى قوى مجموعها منعدم . في اللحظة $t_0=0$ نحرر الكرة ، فيصبح مجموع القوى المطبقة عليها غير منعدم ، فتبدأ حركة السقوط الرأسي للكرة وتتزايد سرعتها مركز قوسها : تسمى هذه المرحلة **بالنظام البدئي** بعد ذلك تتطور حركة G نحو نظام دائم يصبح فيه مجموع القوة المطبقة على الكرة مرة أخرى منعدم : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ أي أن $a=0$.

في المعادلة التفاضلية ، عند اللحظة $t_0=0$ لدينا $a_G(t_0=0) = a_0 = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t_0=0}$ بحيث أن a_0 هو

التسارع البدئي لمركز القوس G للكرة . لدينا كذلك $\vec{f} = \vec{0}$

$$(m_b - m_f)g = m_b \cdot a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{(m_b - m_f)g}{m_b}$$

مبانيا ، تساوي قيمة التسارع البدئي قيمة المعامل الموجه للمماس للمنحنى $v=f(t)$ عند اللحظة $t_0=0$.

ج - الزمن المميز للحركة

يتقاطع الخط المماس للمنحنى $v=f(t)$ مع الخط المقارب للمنحنى في نقطة أفصولها τ نسميه

الزمن المميز للحركة

تحدد قيمة τ بالعلاقة : $v_\ell = a_0 \tau$

ملحوظة : تمكن قيمة τ من إعطاء رتبة قدر مدة النظام البدئي .

3 - حل المعادلة التفاضلية للحركة بتطبيق طريقة أولير Euler

أ - مبدأ الطريقة

– تمكن طريقة أولير من التوصل لحل تقريبي للمعادلة التفاضلية للحركة بتعويض $v(t)$ بدالة تقاربها محليا بحيث نعلم أن

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \Rightarrow a(t) = \left(\frac{dv}{dt} \right) \approx \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t) \cdot \Delta t \quad (1)$$

تتضمن هذه الطريقة مرحلتين من الحساب التي يجب إنجازها بصفة تكرارية لهذا نم وصفها بطريقة رقمية تكرارية . كما أن استعمال هذه الطريقة يستوجب معرفة سرعة مركز القصور في لحظة t والتي ما تكون في غالب الأحيان هي السرعة البدئية v_0 في اللحظة $t=0$.
المرحلة الأولى :

من خلال العلاقة (1) والتي يمكن كتابتها على الشكل التالي : $v(t_{i+1}) = v(t_i) + a(t_i) \cdot \Delta t$ بحيث أن

$$a_i = A - B \cdot v_i^n$$

$$a_0 = A - B v_0^n \text{ لدينا } t=0$$

في المرحلة الثانية :

$$v_1 = v_0 + a_0 v_0^n \Delta t$$

Δt تسمى خطوة الحساب

ونعيد حساب التسارع والسرعة المواليين بنفس الطريقة
ثم نبحت عن قيم n و A و B التي تمكن من تطابق القيم النظرية المحصلة باستعمال طريقة أولير مع القيم التجريبية أي تطابق المنحنيين .

VI – السقوط الرأسي الحر .

1 – تعريف

السقوط الحر لجسم صلب هو حركة مركز القصور هذا الجسم في مرجع أرضي عندما يخضع الجسم لقوة الثقالة فقط .

نظريا يكون السقوط حرا إذا تم قي الفراغ ، ويمكن اعتبار سقوط جسم في الهواء حرا إذا كانت كثافته عالية وشكله انسيابي ، ومنطقة سقوطه محدودة في مجال الثقالة .

2 – متجهة التسارع a_G لمركز القصور .

نعتبر السقوط الحر لجسم صلب في مجال الثقالة وفي مرجع أرضي . أي أن الجسم يوجد تأثير وزنه فقط .

$$\vec{g} = \vec{a}_G \text{ نطبق القانون الثاني لنيوتن : } \vec{P} = m \cdot \vec{g} = m \vec{a}_G \text{ أي أن } \vec{g} = \vec{a}_G$$

3 – المعادلة الزمنية للحركة

في المعلم (O, \vec{k}) الموجه نحو الأسفل نسقط العلاقة فنحصل على :

$$a_z = g \Rightarrow \frac{dv_z}{dt} = g \Rightarrow v_z = gt + C$$

$$v_G(t=0) = v_0 = 0 \text{ أي أن } v_z = gt \text{ ونستنتج أن سرعة } G \text{ دالة زمنية خطية .}$$

بنفس الطريقة نبحت عن $z(t)$:

$$v_z = \frac{dz}{dt} = gt \Rightarrow z(t) = \frac{1}{2} gt^2 + C'$$

$z(0) = z_0 = 0$ وبالتالي فإن $C' = 0$ أي أن المعادلة الزمنية لحركة السقوط الحر للجسم الصلب بدون سرعة

$$\text{بدئية ومن النقطة } O \text{ تم اختيارها كأصل معلم الزمن هي : } z(t) = \frac{1}{2} gt^2 .$$

وهذه المعادلة نعتمها بالنسبة لجميع الأجسام الصلبة التي تطلق بدون سرعة بدئية في سقوط حر أي أنها تسقط بنفس الحركة ، **حركة مستقيمة متغيرة بانتظام** .

تمرين تطبيقي 1 :

I – تسقط كرة رأسيا بدون سرعة بدئية . نعتبر السقوط حرا ونقوم بدراسته في معلم متعامد وممنظم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ محوره (O, \vec{k}) رأسي وموجه نحو الأسفل .

1 – ما طبيعة مسار G مركز قصور الكرة ؟

2 – أجرد القوى المطبقة على الكرة أثناء سقوطها . ما القوى التي نهملها أمام وزن الجسم ؟ وما هي الشروط لكي نقوم بهذا الإهمال ؟

3 – عبر بدلالة الزمن t عن الأنسوب z للنقطة G .

4 – أحسب السرعة التي ستصل بها الكرة إلى الأرض . نعطي $h=2m$.

II – السرعة البدئية في اللحظة $t=0$ لمركز قصور الكرة أرسلت رأسيا نحو الأعلى تساوي $v_0=15,0m/s$

1 – اعط تعبير الإحداثية v لمتجهة السرعة لمركز القصور الكرة لمحور رأسي (O, \vec{k}) موجه نحو الأعلى

للمعلم المتعامد والممنظم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2 – أوجد تعبير t_M تاريخ اللحظة الموافقة للارتفاع الأقصى z_M للنقطة G ، واحسب قيمته .

3 – أحسب قيمة z_M .