

## التذبذبات الحرة في دائرة RLC متوالية

### I - تفريغ مكثف في وشيعة

#### 1- النشاط التجريبي

ننجز التركيب الكهربائي الممثل جانبه حيث نستعمل وسيط معلوماتي وحاسوب وبرنم يعالج المعطيات أو راسم التذبذب ذاكراتي .

+ نضبط التوتر المستمر الذي يعطيه المولد على القيمة  $E=3V$  ومقاومة الموصل الاومي على  $r'=0\Omega$

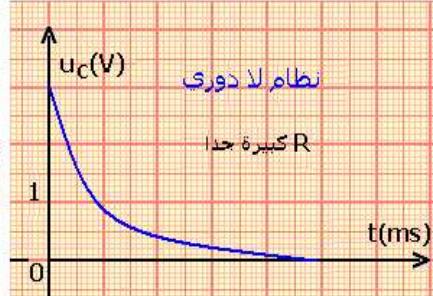
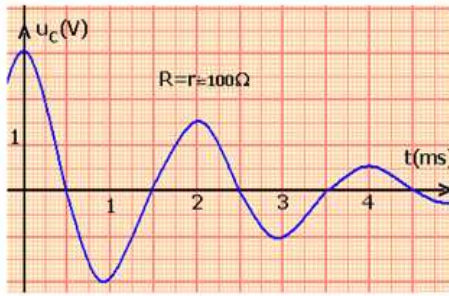
+ نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع (1) لمدة زمنية كافية لشحن المكثف كليا .

+ نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع (2) فنحصل على دائرة RLC متوالية مقاومتها الكلية  $R=r+r'$  حيث  $r$  مقاومة الو شيعة .

+ نعاين التوتر  $u_c(t)$  بين مربطي المكثف

+ نعيد التجربة عدة مرات برفع المقاومة  $r'$

**النتائج :**



#### الاستثمار:

1- يمثل الرسم التذبذبي الممثل باللون الأزرق في الشكل (2) نموذجا للمنحنى المحصل عليه بالنسبة  $r'=0$

1-1 كيف يتغير وسع التوتر  $u_c(t)$  ؟ هل  $u_c(t)$  دالة دورية ؟

عند وضع K في الموضع (1) يشحن المكثف وعند وضعه في الموضع (2) نحصل على دائرة RLC متوالية حيث في هذه الحالة يفرغ المكثف في الو شيعة .

ويكون التوتر  $u_c(t)$  بين مربطي المكثف متناوبا .  $u_c(t)$  ليست بدالة دورية .

-وسع التوتر  $u_c(t)$  يتناقص مع الزمن  $t$  نقول أن التذبذبات مخمدة

بما أن التذبذبات تتم دون أن تزود الدارة RLC بالطاقة غير الطاقة المخزونة في المكثف ، نقول أن التذبذبات حرة .

**خلاصة :**

يؤدي تفريغ مكثف ، مشحون ، في وشيعة دائرة RLC متوالية ، إلى ظهور تذبذبات حرة ومخمدة .

نقول أن الدارة RLC المتوالية تكون متذبذبا كهربائيا حرا ومخمدًا .

#### أنظمة التذبذبات الحرة :

1-2 نسمي شبه الدور T المدة الزمنية الفاصلة بين قيمتين قصويتين متتاليتين للتوتر  $u_c(t)$  عين مبيانيا T من خلال المبيان يمكن أن نعين شبه الدور وهو المدة الزمنية الفاصلة بين قيمتين قصويتين متتاليتين للتوتر  $u_c(t)$  .

#### - تعريف بشبه الدور T

نسمي شبه الدور T المدة الزمنية الفاصلة بين قيمتين قصويتين متتاليتين للتوتر  $u_c(t)$  .

2 - ما تأثير المقاومة R على :

1-2 وسع التذبذبات ؟

عندما نغير المقاومة الكلية للدائرة يتغير وسع التذبذبات.

2-2 شبه الدور T ؟

بالنسبة لقيم المقاومة صغيرة جدا يلاحظ أن شبه الدور لا يتعلق بقيمة R

3-عندما تأخذ المقاومة  $r'$  قيمة كبيرة جدا : هل التوتر  $u_c(t)$  المعاين تذبذبي ؟

عندما تأخذ R قيم كبيرة جدا  $u_c(t)$  توتر غير تذبذبي أي أن التذبذبات تزول يكون لدينا خمود مهم .

4-حسب قيم المقاومة الكلية R للدائرة RLC يلاحظ تجريبا وجود نظامين للتذبذبات : نظام شبه دوري ونظام لا دوري .

تعرف على هاذين النظامين من خلال الشكل 2

النظام شبه الدوري يحدث إذا كانت قيمة المقاومة R صغيرة .

النظام لا دوري عندما تكون R كبيرة جدا حيث تزول التذبذبات نظرا لوجود خمود مهم .

5- نضبط من جديد  $r'$  على القيمة 0

في مرحلة أولى نأخذ  $L=11\text{mH}$  و  $C=1\mu\text{F}$  ونقيس شبه الدور T .

في مرحلة ثانية : نأخذ  $L=11\text{mH}$  و  $C=0,22\mu\text{F}$  ونقيس T .

هل يتعلق شبه الدور بكل من L و C ؟

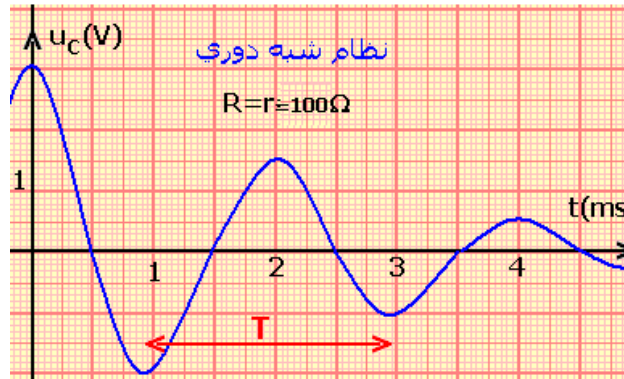
نعم يتعلق شبه الدور بقيم L و C ولا يتعلق بقيم R

### - أنظمة التذبذبات الحرة

حسب مقاومة الدارة RLC نحصل على ثلاثة أنظمة

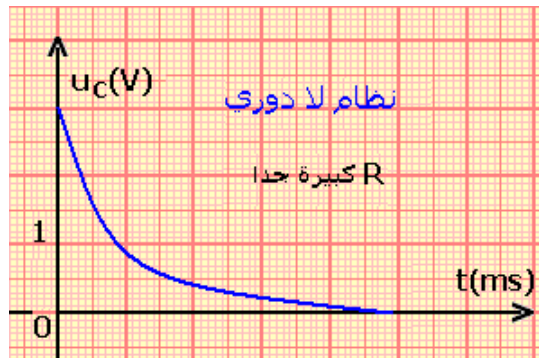
#### أ-نظام شبه دوري

R صغيرة نحصل على ذبذبات يتناقص وسعها تدريجيا مع الزمن

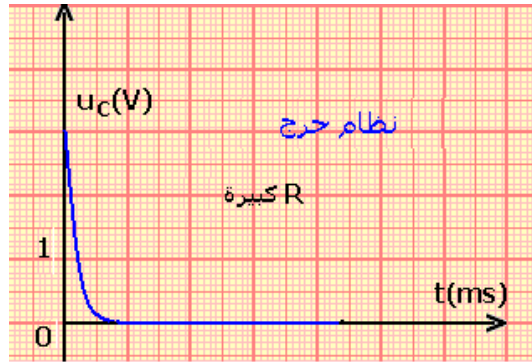


#### ب- نظام لا دوري

R كبيرة جدا = تزول التذبذبات نظرا لوجود خمود مهم ونسمي هذا النظام نظام لا دوري



## ج- نظام حرج



في الذبذبات الحرة توجد قيمة معينة للمقاومة نرسم لها ب  $R_C$  وتسمى مقاومة حرجة وهي مقاومة تفصل بين النظام شبه الدوري والنظام اللا دوري ونسمي النظام في هذه الحالة بالنظام الحرج وفي هذه الحالة يرجع التوتر  $u_c(t)$  إلى صفر بسرعة ودون تذبذب وتتعلق  $R_C$  ب  $C$  و  $L$ .

## 2 \_ المعادلة التفاضلية لدارة RLC متوالية .

نعتبر الدارة المتوالية الممثلة في الشكل جانبه :

نطبق قانون إضافية التوترات بين  $F$  و  $D$  فنجد :

$$u_c + u_R + u_L = 0 \quad (1)$$

$$u_R = r' \cdot i \quad u_L = ri + L \frac{di}{dt} \quad i = C \cdot \frac{du_c}{dt}$$

$$u_R = r' \cdot C \frac{du_c}{dt} \quad u_L = rC \frac{du_c}{dt} + LC \frac{d^2u_c}{dt^2}$$

نعوض في المعادلة (1)

$$u_c + r' \cdot C \frac{du_c}{dt} + rC \frac{du_c}{dt} + LC \frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$$

$$LC \frac{d^2u_c}{dt^2} + (r+r')C \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

$$r+r' = R$$

$$LC \frac{d^2u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = 0 \quad (2)$$

المعادلة التفاضلية لدارة RLC متوالية التي يحققها التوتر  $u_c(t)$  بين مربطي المكثف هي :

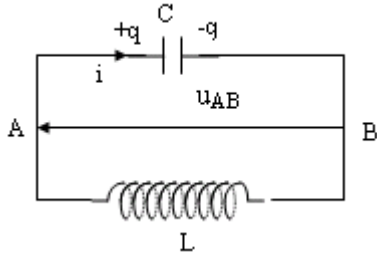
$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = 0 \quad (2)$$

يعبر المقدار  $\frac{R}{L} \frac{du_c}{dt}$  عن ظاهرة خمود الذبذبات ، ويحدد حسب قيم  $R$  نظام هذه الذبذبات .

## II \_ الذبذبات غير المخمدة في دارة مثالية LC .

تتكون الدارة من مكثف سعته  $C$  وشحنته البدئية  $q_0$  ووشية معامل تحريضها  $L$  ومقاومتها الداخلية  $r$  ونعتبرها مهملة . تنعث هذه الدارة بالمثالية لاستحالة تحقيقها تجريبيا لكون أن كل الوشيعات تتوفر على مقاومة داخلية .

### 1 \_ المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_c(t)$ .



حسب قانون إضافية التوترات لدينا :

$$u_c + u_L = 0 \quad (1)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad i = C \cdot \frac{du_c}{dt}$$

$$u_L = LC \frac{d^2 u_c}{dt^2}$$

نعوض في المعادلة (1)

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c = 0$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c = 0 \quad (2)$$

خلال الذبذبات الكهربائية الحرة غير المخمدة لدارة LC ، يحقق التوتر  $u_c(t)$  بين مرطبي المكثف المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c = 0$$

## 2 - حل المعادلة التفاضلية :

المعادلة التفاضلية  $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c = 0$  معادلة خطية من الدرجة الثانية ، رياضيا حلها يكتب على

الشكل التالي :

$$u_c(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

$U_m$  - وسع الذبذبات .

$\left(\frac{2\pi}{T_0} + \varphi\right)$  - الطور في اللحظة ذات التاريخ  $t$  .

$T_0$  : الدور الخاص للذبذبات .

$\varphi$  : الطور عند أصل التواريخ ( $t=0$ )

### أ - تحديد تعبير الدور الخاص :

نعوض الحل  $u_c(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$  في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} = -U_m \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_c(t)$$

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_c(t) = -\frac{1}{LC} u_c(t)$$

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

يتعلق الدور الخاص للذبذبات الحرة غير المخمدة بمعامل التحريض  $L$  وسعة المكثف  $C$  :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

وحدة الدور الخاص  $T_0$  في النظام العالمي للوحدات هي الثانية . (s)

**نمرين تطبيقي :**

بين من خلال معادلة الأبعاد أن وحدة  $T_0$  هي الثانية .  
**ب - تحديد  $\varphi$  و  $U_m$  :**

لتحديد قيم  $\varphi$  و  $U_m$  نحدد الشروط البدئية عند تفريغ المكثف في الوشيعة . أي نعبر عن المقدارين  $u_c(t)$  و  $i(t)$  في اللحظة  $t=0$  باعتبار أن هاتين الدالتين متصلتين كيف ما كانت  $t$  .

$$i(t) = C \cdot \frac{du}{dt} \Rightarrow i(t) = -\frac{2\pi}{T_0} \cdot C \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \text{ لدينا}$$

عند اللحظة  $t=0$  لدينا  $i(0)=0$  الوشيعة لا يمر فيها أي تيار كهربائي

$$i(0) = -\frac{2\pi}{T_0} \cdot C \cdot \sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \varphi = \pi$$

في البداية شحنة المكثف مشحون :  $u_c(0)=E$  .

$$u_c(0) = U_m \cos(\varphi) = E \text{ وبما أن } E > 0 \text{ و } U_m > 0 \text{ فإن } \varphi = 0$$

وبالتالي فإن :

$$u_c(t) = E \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

**ج - تعبير الشحنة  $q(t)$  و  $i(t)$  :**

نعلم أن شحنة المكثف هي :

$$q(t) = C \cdot u_c(t) = C U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$q_m = C U_m$$

شدة التيار الكهربائي :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$= q_m \frac{2\pi}{T_0} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$i(t)$  متقدمة في الطور ب  $\frac{\pi}{2}$  بالنسبة ل  $q(t)$  و  $u(t)$

نقول أن  $u(t)$  و  $q(t)$  على تربع في الطور

التمثيل المبياني ل  $q(t)$  و  $u(t)$

في اللحظة  $t=0$  عندنا  $q=Q_m$  و  $\varphi = 0$

$$q(t) = Q_m \cos\frac{2\pi}{T_0}t$$

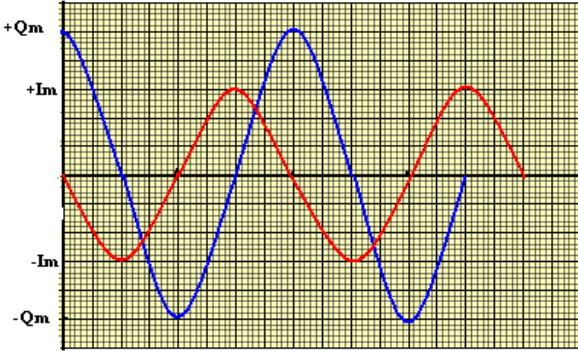
$$i(t) = I_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

ملحوظة : عندما تكون شحنة المكثف قصوية تكون شدة التيار الكهربائي منعدمة .

**III - انتقالات الطاقة بين المكثف والوشيعة .**

توصلنا في الدروس السابقة أن المكثف بإمكانه أن يخزن طاقة كهربائية  $\xi_e = \frac{1}{2} C u_c^2$  وأن الوشيعة كذلك

بإمكانها أن تخزن طاقة مغنطيسية  $\xi_m = \frac{1}{2} L i^2$  .



## 1 \_ الطاقة في الدارة LC مثالية :

دراسة منحنيات تغير الطاقات  $\xi_t, \xi_e, \xi_m$  بدلالة الزمن في دارة RL مثالية .

الطاقة الكلية في المخزونة في الدارة LC هي في كل لحظة مجموع الطاقة الكهربائية في المكثف

$$\xi_e = \frac{1}{2} Cu_C^2 \text{ والطاقة المخزونة في الوشيجة } \xi_m = \frac{1}{2} Li^2 .$$

$$\xi_t = \xi_e + \xi_m = \frac{1}{2} Cu_C^2 + \frac{1}{2} Li^2$$

تمثل الشكل جانبه تغيرات  $\xi_t, \xi_e, \xi_m$  بدلالة الزمن .

1 \_ كيف تتغير الطاقة  $\xi_m$  عندما تنقص

الطاقة المخزونة في المكثف ؟

2 \_ كيف تتغير الطاقة  $\xi_e$  عندما تنقص

الطاقة المخزونة في الوشيجة ؟

3 \_ كيف تتغير الطاقة الكلية  $\xi_t$  ؟ أكتب

تعبير الطاقة الكلية بطريقتين .

4 \_ أثبت رياضياً أن الطاقة الكلية لدارة مثالية LC ثابتة خلال الزمن t . بطريقتين ، استعمال حل المعادلة التفاضلية واستعمال المعادلة التفاضلية مباشرة .

خلاصة :

تكون الطاقة الكلية لدارة مثالية LC ثابتة خلال الزمن وتساوي الطاقة البدئية المخزونة في

المكثف .

خلال الذبذبات غير المخمدة تتحول الطاقة الكهربائية في المكثف إلى طاقة مغناطيسية في

الوشيجة والعكس صحيح .

$$\xi_t = \xi_e + \xi_m = \frac{1}{2} Cu_C^2 + \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} CU_m^2 = \frac{1}{2} Li_m^2$$

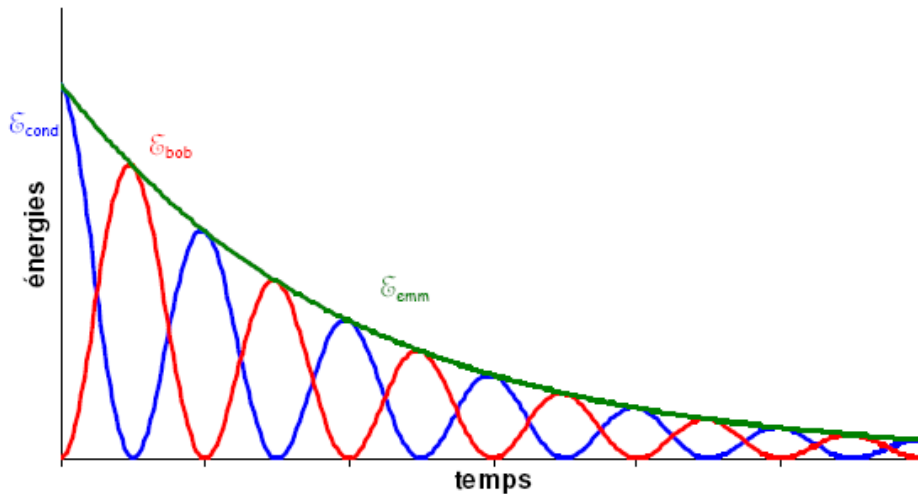
## 2 \_ الطاقة في الدارة RLC المتوالية .

دراسة منحنيات تغير الطاقة  $\xi_t, \xi_e, \xi_m$  بدلالة الزمن في RLC متوالية

خلال دراسة تجريبية لدارة RLC متوالية حيث المقاومة الكلية R غير منعدمة نعاين بواسطة جهاز ملائم

لهذا الغرض منحنيات تغيرات الطاقة  $\xi_t, \xi_e, \xi_m$  بدلالة الزمن فنحصل على المنحنيات الممثلة في الشكل

جانبه :



1 - كيف تتغير الطاقة  $\xi_e$  عند تزايد  $\xi_m$  ؟

نفس السؤال عند تناقص  $\xi_m$  . ماذا تستنتج ؟

عندما تنقص الطاقة في المكثف تزداد الطاقة المخزونة في الوشيجة والعكس صحيح . أي أن هناك تبادل طاقي بين المكثف والوشيجة

2 - كيف تتغير بصفة عامة الطاقة الكلية  $\xi_t$  المخزونة في الدارة بدلالة الزمن ؟

يلاحظ أن خلال كل تبادل طاقي بين المكثف والوشيجة تتناقص الطاقة الكلية نتيجة وجود المقاومة R .

2 - ما الظاهرة المسؤولة عن هذا التغيير ؟

ظاهرة خمود نتيجة تحول جزء من الطاقة الكلية بمفعول جول إلى طاقة حرارية .

4 - ما المقدار الذي يحول دون الحصول على ذبذبات غير مخمدة ؟

$$\xi_t = \xi_e + \xi_m = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2$$

$$\frac{d\xi_t}{dt} = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} = i \left( L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} \right)$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = -R \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{d\xi_t}{dt} = -Ri^2$$

من خلال هذه النتيجة يتبين أن الطاقة الكلية تناقصية :

$$\frac{d\xi_t}{dt} = -Ri^2 < 0$$

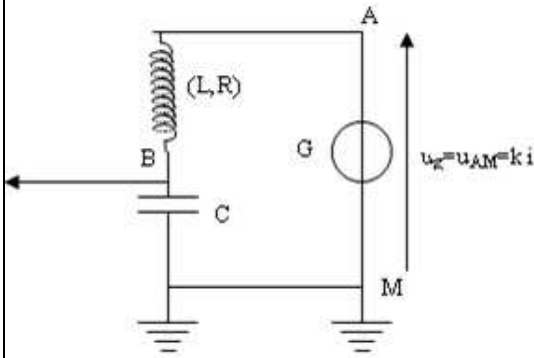
يعزى هذا التناقص إلى وجود المقاومة R .

خلاصة :

**تناقص الطاقة الكلية لدارة RLC متوالية تدريجيا بسبب مفعول جول .**

**VI - صيانة الذبذبات .**

في كل لحظة يمكن كتابة



$$u_{AM} = u_{AB} + u_{BM}$$

$$ki = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \text{ et } u = u_{BM}$$

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + (R - k)C \frac{du}{dt} + u = 0$$

بالنسبة لـ  $k=R$  نحصل على المعادلة التفاضلية

$$\text{التالية } \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{LC}u = 0 \text{ وهي المعادلة المميزة}$$

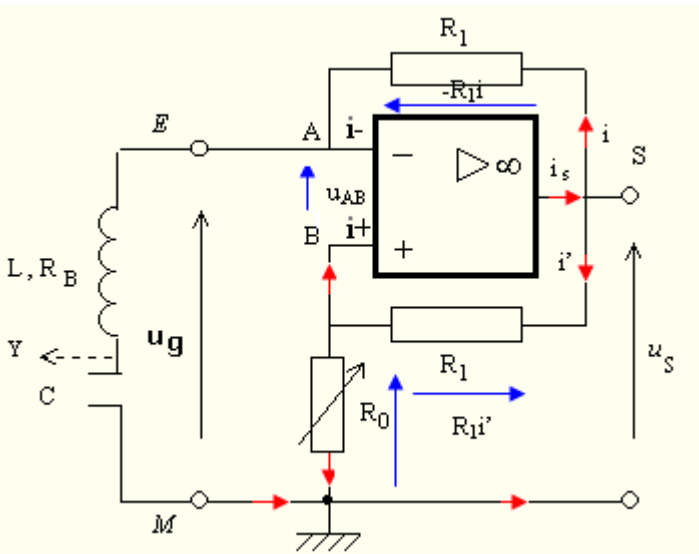
للمتذبذب (L,C) ذي مقاومة غير مهملة .

إذن فالتركيب المدروس يمكن من صيانة التذبذبات

إنجاز المولد G

المضخم العملياتي كاملا ويشغل في النظام

الخطي .



$$u_{AB}=0 \text{ و } \dot{i}=i'=0$$

$$u_g = u_{AM} = u_{AS} + u_{SB} + u_{BM}$$

$$= -R_1 i + R_1 i' + R_0 i'$$

$$u_{AS} = u_{AB} + u_{BS}$$

$$-R_1 i = 0 - R_1 i' \Leftrightarrow i = i'$$

$$u_g = R_0 i \Leftrightarrow u_g = k i$$

$$k = R_0$$

معاينة التوتر بين مرطبي مكثف الدارة (L,C) الذي يوجد بها المولد G

عند معاينة التوتر بين مرطبي مكثف نلاحظ :

$R_0 < R$  لاتكون هناك تذبذبات

$R_0 > R$  تكون هناك تذبذبات لا جيبية

$R_0$  أكبر بقليل من  $R$  تكون التذبذبات جيبية

