

الأستاذ محمد الرقبة عموميات حول الدوال

(1) الدالة التآلفية La fonction affine

المستوى منسوب إلى معلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(l_f) يرمز إلى منحنى دالة f بالنسبة للمعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

أنشطة

① • أرسم التمثيل المبياني للدوال المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = 2x - 1$ ، $g(x) = -x + 2$

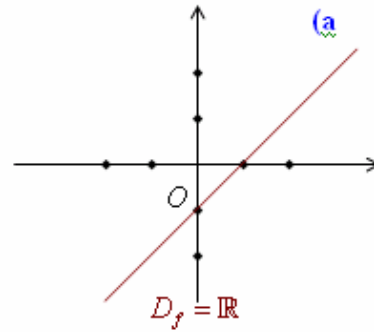
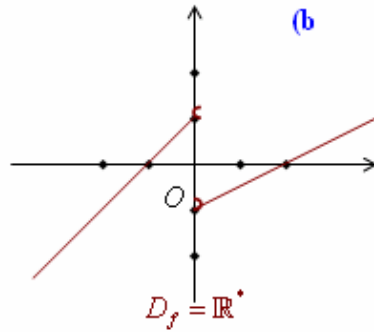
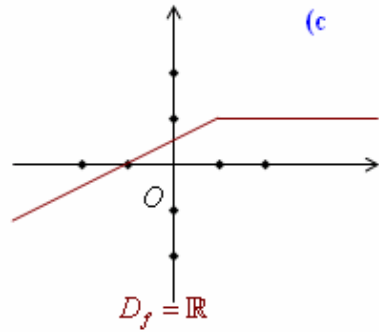
• استنتج التمثيل المبياني للدالتين المعرفتين على \mathbb{R} بما يلي : $l(x) = f(|x|)$ و $h(x) = |g(x)|$

② أوجد الدالة التآلفية التي يمر تمثيلها المبياني من النقطتين $A(1,0)$ و $B(2,1)$

③ حدد الدالة التآلفية التي يمر منحناها من النقطة $A(1,0)$

ولكل عددين حقيقيين x_1 و x_2 : $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}$

④ حدد في كل حالة من الحالات التالية الدالة f التي تمثيلها المبياني هو :



⑤ مثل مبيانيا الدالة المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = -x & , x \leq 0 \\ f(x) = 2x & , 0 \leq x < 1 \\ f(x) = -2x + 4 & , 1 \leq x \end{cases}$$

خلاصة

تعريف الدالة التآلفية هي كل دالة معرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$f(x) = ax + b$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

خاصية منحنى دالة تآلفية في المستوى المنسوب إلى معلم هو مستقيم.

(2) زوجية دالة Parité d'une fonction

أنشطة

① أدرس زوجية الدوال التالية :

$f(x) = |x|$ -a

$f(x) = |x+1|$ -b

$f(x) = \sqrt{x}$ -c

$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ -d

$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$

الأستاذ محمد الرقبة

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad -e$$

$$f(x) = x^3 \quad -f$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2|x| + 1} \quad -g$$

(2) مجموع الدالتين زوجيتين هو دالة زوجية

جداء الدالتين زوجيتين هو دالة زوجية

② لتكن P دالة حدودية زوجية.
بين أن الشكل المختصر للحدودية $P(x)$ لا يحتوي إلا على حدود درجتها زوجية.

(3) مجموع الدالتين فرديتين هو دالة فردية

جداء الدالتين فرديتين هو دالة زوجية

③ لتكن P دالة حدودية فردية.
بين أن الشكل المختصر للحدودية $P(x)$ لا يحتوي إلا على حدود درجتها زوجية؟

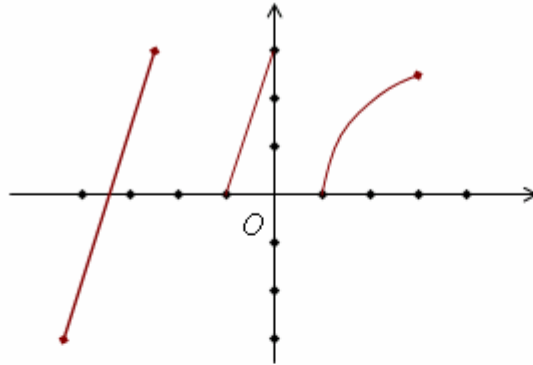
④ مثل مبيانيا الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$f \text{ زوجية ولكل } x \text{ من } \mathbb{R}^+ : f(x) = x+1$$

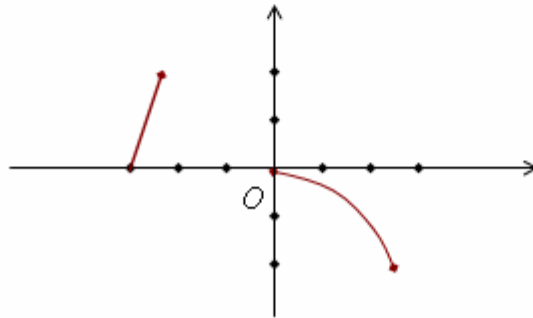
⑤ مثل مبيانيا الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$f \text{ فردية ولكل } x \text{ من } \mathbb{R}^+ : f(x) = -x+1$$

② ⑥ أتمم المنحنى (ℓ) إذا علمت أنه يمثل دالة زوجية حيز تعريفها هو : $[-4, 4]$



③ ⑦ أتمم المنحنى (ℓ) إذا علمت أنه يمثل دالة فردية حيز تعريفها هو : $[-3, 3]$



خلاصة :

الدالة الزوجية La fonction paire

تعريف : لتكن f دالة عددية و D_f مجموعة تعريفها.

الأستاذ محمد الرقبة

نقول إن f دالة زوجية إذا تحقق الشرطان التاليان :

$$-a \text{ لكل } x \text{ من } D_f : -x \in D_f$$

$$-b \text{ لكل } x \text{ من } D_f : f(-x) = f(x)$$

خاصية : لتكن f دالة عددية و (ℓ_f) منحناها في معلم متعامد.

تكون الدالة f زوجية إذا وفقط إذا كان (ℓ_f) متماثلا بالنسبة لمحور الأرتيب.

الدالة الفردية La fonction impaire

تعريف : لتكن f دالة عددية و D_f مجموعة تعريفها.

نقول إن f دالة فردية إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان :

$$-a \text{ لكل } x \text{ من } D_f : -x \in D_f$$

$$-b \text{ لكل } x \text{ من } D_f : f(-x) = -f(x)$$

خاصية : لتكن f دالة عددية و (ℓ_f) منحناها في معلم متعامد.

تكون الدالة f فردية إذا وفقط إذا كان (ℓ_f) متماثلا بالنسبة لأصل المعلم.

ملاحظة : إذا كان (ℓ_f) غير متماثل بالنسبة للصفر

فإن f ليست لا فردية ولا زوجية.

رتابة دالة (3) Monotonie d'une fonction

أنشطة

① لتكن f الدالة التآلفية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$f(x) = ax + b \text{ حيث } a \text{ و } b \text{ عدنان حقيقيان.}$$

- أدرس رتابة الدالة f

- ماذا يمكنك استنتاجه " حسب قيم a " ؟

- استنتج رتابة الدالة g المعرفة بـ :

$$\begin{cases} g(x) = 2x - 1 & , x \geq 1 \\ g(x) = -x + 2 & , x < 1 \end{cases}$$

② أدرس رتابة الدالة f على كل من المجالين $\left[-\infty, \frac{3}{2}\right]$ و $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right]$ حيث : $f(x) = x^2 - 3x + 2$

③ أدرس رتابة الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$

④ أتمم الجدول التالي علما أنه يمثل التغيرات على $[-2, 2]$ لدالة فردية.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1				

نفس السؤال إذا كانت f زوجية.

الأستاذ محمد الرقبة

خلاصة

تعريف : لتكن f دالة عددية و D_f مجموعة تعريفها.

ليكن x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من D_f .

العدد الحقيقي $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ يسمى **معدل تغير** f بين العددين x_1 و x_2 .

خاصيات

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I .

• تكون f تزايدية (قطعا) على I إذا وفقط إذا كان $0 \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ لكل x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من I .

• تكون f تناقصية (قطعا) على I إذا وفقط إذا كان $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0$ لكل x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من I .

ملاحظات :

ملاحظة ① : لتكن f الدالة التآلفية المعرفة بـ $f(x) = ax + b$

- إذا كان $a > 0$ فإن f تزايدية قطعا على \mathbb{R} .

- إذا كان $a < 0$ فإن f تناقصية قطعا على \mathbb{R} .

- إذا كان $a = 0$ فإن f ثابتة على \mathbb{R} .

ملاحظة ① : " الرتبة والزوجية "

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D

و I مجال حيث $I \subset D \cap \mathbb{R}^+$ أو $I \subset D \cap \mathbb{R}^-$

وليكن J مماثل I بالنسبة للصفر.

الحالة ① فردية f

f تزايدية على I يكافئ f تزايدية على J .

f تزايدية قطعا على I يكافئ f تزايدية قطعا على J .

f تناقصية (قطعا) على I يكافئ f تناقصية (قطعا) على J .

الحالة ② زوجية f

f تزايدية (قطعا) على I يكافئ f تناقصية (قطعا) على J .

f تناقصية (قطعا) على I يكافئ f تزايدية (قطعا) على J .

(4) الدالة الموجبة – الدالة السالبة

Fonction positive – Fonction négative.

أنشطة.

① لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

- بين أن لكل x من \mathbb{R} : $f(x) = -(x-1)^2 - 2$

② لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = x^2 + 3x + 4$

- بين أن لكل x من \mathbb{R} : $0 \leq f(x)$

تعريف لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D .

• نقول إن f دالة موجبة على D إذا كان $f(x) \geq 0$ ، لكل x من D

ونكتب $f \geq 0$

• ونقول إن f دالة سالبة على D إذا كان لكل x من D ، $f(x) \leq 0$

الأستاذ محمد الرقبة

ونكتب $f \leq 0$

ملاحظة • إذا كان لكل x من D : $0 < f(x)$ نقول أن f موجبة قطعاً

ونكتب $0 < f$

• إذا كان لكل x من D : $f(x) < 0$ نقول أن f سالبة قطعاً

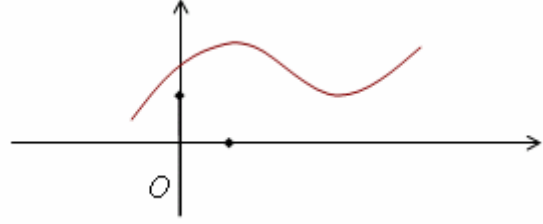
ونكتب $f < 0$

التأويل المبياني

• المستوى منسوب إلى معلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

و f دالة عددية معرفة على D .

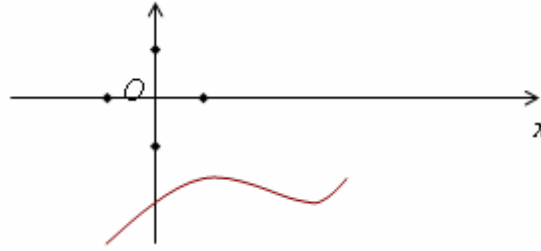
- تكون f موجبة على D إذا وفقط إذا كان المنحنى الممثل لها على D



يوجد في نصف المستوي الذي أراتيه موجبة.

- تكون f سالبة على D إذا وفقط إذا كان المنحنى الممثل لها على D

يوجد في نصف المستوي الذي أراتيه سالبة.



تطبيقات : حدد إشارة الدوال التالية :

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 1}$$

$$g : x \mapsto x^2 + x + 1$$

(5) مقارنة دالتين Comparaison de deux fonctions

تمهيد : لتكن f و g الدالتين المعرفتين بما يلي :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 2$$

$$g(x) = x^2 - 3x + 1 \quad \text{و}$$

- بين أن لكل x من \mathbb{R} : $f(x) - g(x) > 0$

نلاحظ أن لكل x من \mathbb{R} : $f(x) > g(x)$

ونقول أن f أكبر من g .

ونكتب $f > g$

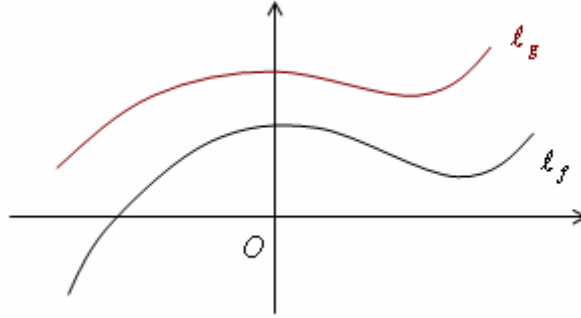
تعريف لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على نفس المجموعة D .

نقول إن f أصغر من أو تساوي g (أو g أكبر من أو تساوي f) على D إذا كان لكل x من D : $f(x) \leq g(x)$

ونكتب $f \leq g$ على D .

Interprétation graphique التأويل المبياني

لنكن f و g دالتين معرفتين على نفس المجموعة.
نقول أن f أصغر من أو تساوي g على D إذا وفقط إذا كان منحنى f تحت منحنى g على D .



تمرين تطبيقي

قارن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين على \mathbb{R} بـ :

$$f(x) = 4x^2$$

$$g(x) = 4x - 1 \quad \text{و}$$

(6) الدالة المكبورة – الدالة المصغورة – الدالة المحدودة

Fonction Majorée, Minorée, Bornée

تعريف تكن دالة عددية معرفة على مجموعة D .

نقول إن f **مكبورة** على D إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي η بحيث

$$f(x) \leq \eta \quad \text{لكل } x \text{ من } D$$

.....
.....

خاصية لتكن f دالة عددية معرفة على D .

تكون f **محدودة** على D إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي موجب k بحيث :

$$|f(x)| \leq k \quad \text{لكل } x \text{ من } D$$

تمرين تطبيقي

① بين أن الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ محدودة.

② لتكن f الدالة المعرفة على $D =]1, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{1}{x-1}$

- بين أن f مصغورة بالعدد 0

- هل f مكبورة؟

تمهيد :

① لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

بين أن f تقبل قيمة قصوى مطلقة عند النقطة 0 .

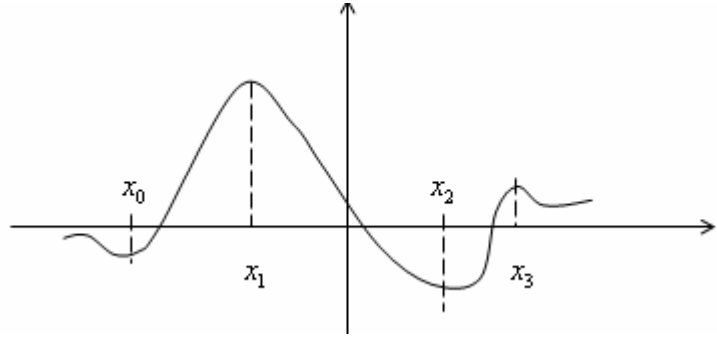
② لتكن f الدالة العددية المعرفة بـ : $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

بين أن f تقبل قيمة دنيا مطلقة عند النقطة 0 .

③ حدد مطراف الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^* بما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} , & 1 \leq |x| \\ x , & -1 < x < 1 \end{cases}$$

④



خلاصة : " تعاريف "

Valeur minimale absolue

- القيمة القصوى المطلقة
- القيمة القصوى النسبية
- القيمة الدنيا المطلقة
- القيمة الدنيا النسبية

" خاصيات "

① - إذا كانت f رتيبة على المجال $I = [a, b]$

فإن $\max_{x \in I} f(x) = \text{Sup}(f(a), f(b))$

و $\min_{x \in I} f(x) = \text{Inf}(f(a), f(b))$

الأستاذ محمد الرقبة

خلاصة

① الدالة الحدودية من الدرجة الثانية

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$$

(8)

المستقيم ذو المعادلة $x = -\frac{b}{2a}$ محور تماثل للمنحنى ℓ .

النقطة $\Omega\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ هي رأس الشلجم

إذا كانت $a < 0$	إذا كانت $0 < a$																
f - <u>تقبل قيمة قصوى عند</u> $-\frac{b}{2a}$	f - <u>تقبل قيمة دنيا مطلقة عند</u> $-\frac{b}{2a}$																
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%; text-align: center;">x</td> <td style="width: 40%; text-align: center;">$-\infty$</td> <td style="width: 40%; text-align: center;">$-\frac{b}{2a}$</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="width: 10%; text-align: center;">$f(x)$</td> <td colspan="3" style="text-align: center;"> </td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	$f(x)$				<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%; text-align: center;">x</td> <td style="width: 40%; text-align: center;">$-\infty$</td> <td style="width: 40%; text-align: center;">$-\frac{b}{2a}$</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="width: 10%; text-align: center;">$f(x)$</td> <td colspan="3" style="text-align: center;"> </td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	$f(x)$			
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$														
$f(x)$																	
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$														
$f(x)$																	

$$ad - bc \neq 0 \quad f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

② الدالة المتخاطبة

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$$

(9)

المنحنى ℓ_f هو هذلول مركزة $\Omega\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$

المقاربتين هما: $D\left(x = -\frac{d}{c}\right)$ و $\Delta\left(y = \frac{a}{c}\right)$

إذا كانت $\frac{a}{c} < 0$	إذا كانت $\frac{a}{c} > 0$																
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%; text-align: center;">x</td> <td style="width: 40%; text-align: center;">$-\infty$</td> <td style="width: 40%; text-align: center;">$-\frac{d}{c}$</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="width: 10%; text-align: center;">$f(x)$</td> <td colspan="3" style="text-align: center;"> </td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$	$f(x)$				<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%; text-align: center;">x</td> <td style="width: 40%; text-align: center;">$-\infty$</td> <td style="width: 40%; text-align: center;">$-\frac{d}{c}$</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="width: 10%; text-align: center;">$f(x)$</td> <td colspan="3" style="text-align: center;"> </td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$	$f(x)$			
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$														
$f(x)$																	
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$														
$f(x)$																	

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

① - دراسة الدالة

$$x \mapsto \sqrt{a+x}$$

② - دراسة الدالة

$$x \mapsto ax^3$$

③ - دراسة الدالة

(12) مركب دالتين عدديتين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = x^2 + 1$

و g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بما يلي : $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

(1) أحسب $f(1)$ ثم $g(2)$

(2) أحسب $f(2)$ ثم $g(5)$

• لاحظ أن

$$g(2) = g(f(1)) = 5$$

$$g(5) = g(f(2)) \quad \text{و}$$

$$gof(1) = 5 \quad \text{ونكتب}$$

$$gof(2) = \frac{11}{4} \quad \text{و}$$

ونقول إن 5 هي صورة 1 بمركبة الدالتين g و f (أو بتركيب الدالتين g و f).

(3) أحسب $f(0)$

هل يمكن حساب صورة $f(0)$ بالدالة g ؟

(4) حدد مجموعة تعريف الدالة gof ، D

ثم حدد $gof(x)$ لكل x من D .

(5) لتكن h الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ : $h(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1}$

أكتب h على شكل مركبة دالتين وحددهما.

(6) لتكن f و g الدالتين المعرفتين على \mathbb{R} بما يلي :

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{و} \quad g(x) = x^2 + 1$$

حدد الدالتين fog و gof .

(7) $f(x) = x^2 + x - 2$ و $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$

- حدد D_{gof} و D_{fog}

- حدد الدالتين gof و fog .