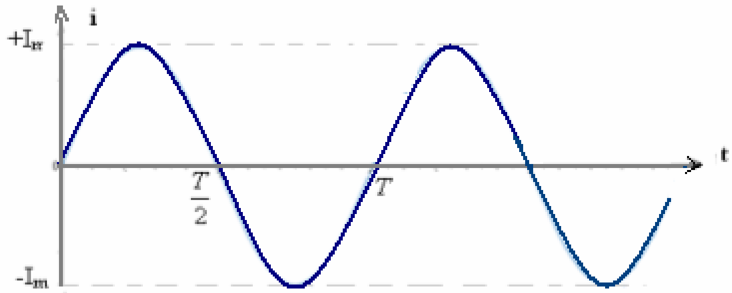
الدارة الكهربائية المتوالية RLC في نظام جيبي وقسري

خاص بمسلكي العلوم الرياضية والفيزيائية .

I عموميات حول التيار الكهربائي المتناوب الجيبي

1) شدة التيار المتناوب الجيبي

التيار المتناوب ألجيبي اللحظي تيار شدته دالة جيبية بالنسبة للزمن وتتغير إشارته مرتين في الدور .



$$i(t) = I_m.\cos(\omega.t + \varphi)$$

I_m : الشدة القصوية للتيار الكهربائي.

φ : طور التيار الكهربائي عند أصل التواريخ. ب **(rad)**.

$\omega.t + \varphi$ طور التيار الكهربائي عند اللحظة t ب: (rad) .

ω : نبض التيار الكهربائي ب : rad / s .

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi N}$$

$(rad.s^{-1})$ (s) (Hz)

الشدة الفعالة للتيار الكهربائي ونرمز إليها ب : I وتربطها بالشدة القصوية I_m العلاقة التالية:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$ تقاس بواسطة جهاز الأمبيرميتر.

2) التوتر المتناوب الجيبي

التوتر الكهربائي الجيبي اللحظي دالة جيبية بالنسبة للزمن تكتب كما يلي : $u(t) = U_m.\cos(\omega.t + \varphi)$.

التوتر الفعال U تربطه بالتوتر القصوي العلاقة التالية :

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$ يقاس بواسطة جهاز الفولطميتر ،

3) طور التوتر بالنسبة للتيار

الشدة اللحظية للتيار الكهربائي: $i(t) = I_m \cos(\omega.t + \varphi_i)$

والتوتر اللحظي: $u(t) = U_m \cos(\omega.t + \varphi_u)$

فرق الطور بين $u(t)$ و $i(t)$ هو : $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ وهو مقدار جبري يعبر عنه ب:. (rad)

φ تسمى : <u>طور</u> $u(t)$ بالنسبة ل: $i(t)$.

<u>ملحوظة</u> : طريقة التحديد المبياني لفرق الطور φ .

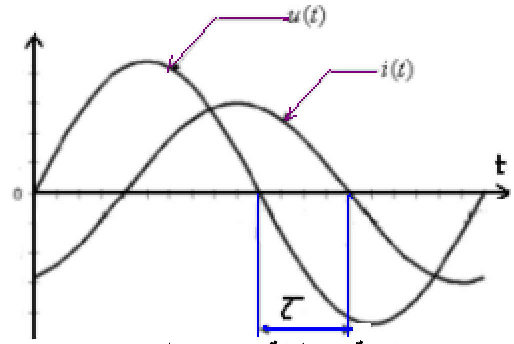
باعتبار كشروط بدئية $i = 0$ عند اللحظة $t = 0$ تكون $\varphi_i = 0$ وبذلك يكون $\varphi = \varphi_u$.

يصبح لدينا : $i(t) = I_m \cos \omega.t$

$$u(t) = U_m \cos(\omega.t + \varphi)$$

أي : $u(t) = U_m \cos\omega(t + \frac{\varphi}{\omega})$

وبذلك يوافق فرق الطور φ بين الدالتين $u(t)$ و $i(t)$ الفرق الزمني τ بين المنحنيين (انظر الشكل).



ويمكن قياس τ على شاشة راسم التذبذب من تحديد القيمة المطلقة لفرق الطور: φ.

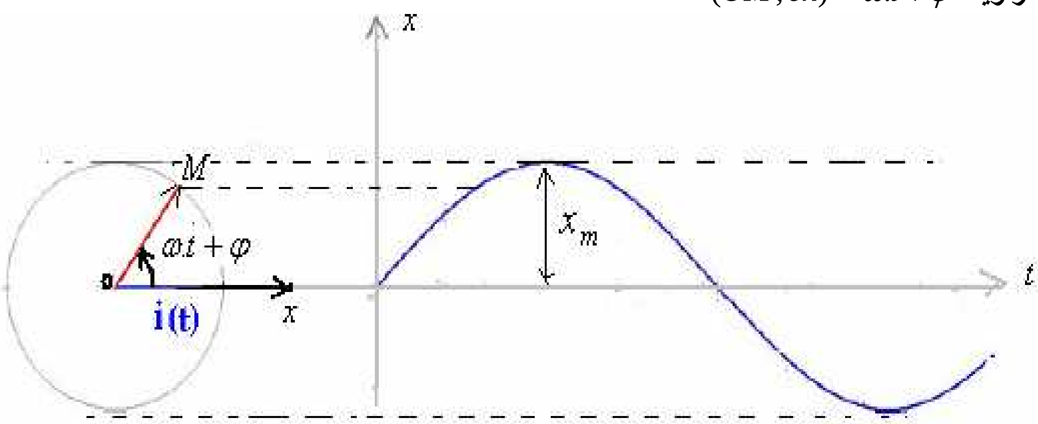
$$|\varphi| = 2\pi \frac{\tau}{T}$$

4)إنشاء فرينيل

أي تمثيل فرينيل لمقدار جيبي.

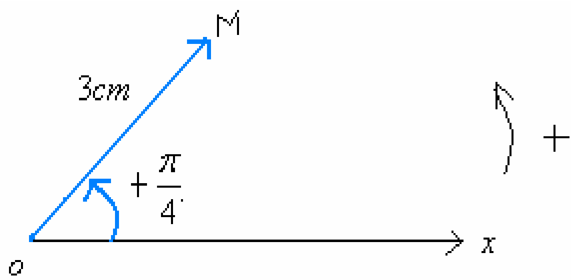
يمكن أن نقرن بكل دالة جيبية $x = x_m \cos(\omega.t + \varphi)$ متجهة $\overrightarrow{OM}$ منظمها : $\|\overrightarrow{OM}\| = x_m$ ، تدور بسرعة ثابتة ω حول o.

وتكون مع ox زاوية $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ox}) = \omega.t + \varphi$.



وللتبسط تمثل الدالة بمتجهة فرينيل في الموضع الذي تحتله عند اللحظة $t = 0$.

مثال : متجهة فرينيل الموافقة للدالة: $x = 3\cos(\omega.t + \frac{\pi}{4})$ متجهة منظمها $3cm$ وتكون زاوية $+\frac{\pi}{4}$ مع المحور ox .

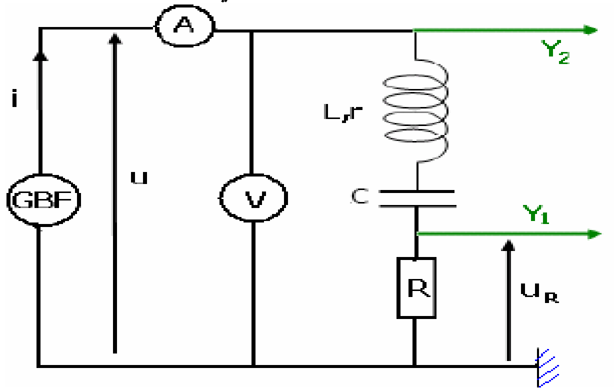


مثال2 : متجهة فرينيل الموافقة للدالة: $x = 2{,}5\cos(\omega.t - \frac{\pi}{2})$ متجهة منظمها $2{,}5cm$ وتكون زاوية $-\frac{\pi}{2}$ مع المحور ox.

II دراسة دارة RLC متوالية في نظام جيبي وقسري

1) الدراسة التجريبية للدارة RLC

ننجز التركيب التالي:



نعاين على شاشة راسم التذبذب في المدخل Y_2 التوتر $u(t)$ بين مربطي الدارة RLC وفي المدخل Y_1 التوتر بين مربطي الموصل الأومي $u_R(t)$.

$u_R(t) = R.i(t)$ أي : $i(t) = \dfrac{u_R(t)}{R}$ مما يدل على أن المنحنى المعاين على المدخل Y_1 يتناسب إطرادا مع شدة التيار $i(t)$.

نحصل على تذبذبات قسرية حيث يجبر المولد GBF الدارة على التذبذب بتردد مساو لتردده.

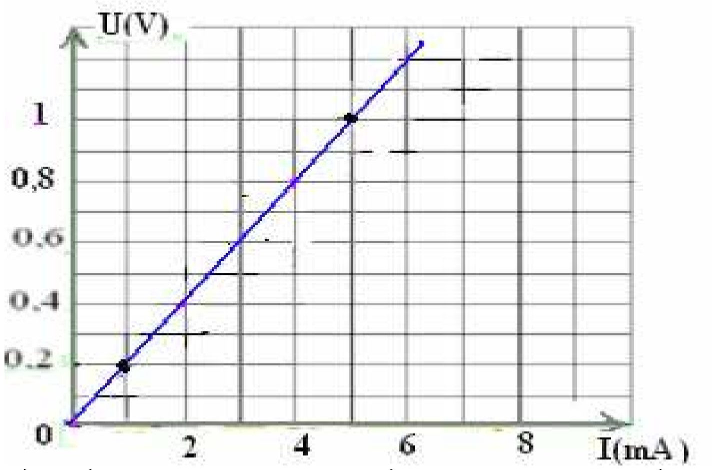
نسمي الدارة المتوالية RLC الرنان ، والمولد GBF المثير.

2) مفهوم الممانعة

نبقي التردد ثابتا ونغير التوتر الفعال U ونقيس تغيرات الشدة الفاعلة للتيار الكهربائي في الدارة .

جدول القياسات :

U(V)	0	0,4	0,8	1,2	1,6
I(mA)	0	2	4	6	8



المنحنى الممثل لتغيرات الشدة الفعالة I للتيار الكهربائي بدلالة التوتر الفعال عبارة عن دالة خطية .

$$U=Z.I \quad (1)$$

المعامل الموجه Z يمثل ممانعة الدارة ، ويعبر عن الممانعة في النظام العالمي للوحدات ب الأوم Ω .

ملحوظة : بضرب طرفي العلاقة (1) في $\sqrt{2}$ تصبح كما يلي : $U.\sqrt{2} = Z.I.\sqrt{2}$

أي: $U_m = Z.I_m$ ومنه نستنتج بصفة عامة أن ممانعة الدارة :

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m}$$

و مبيانيا : $Z = \dfrac{\Delta U}{\Delta I} = \dfrac{(1-0,2)V}{(5-1).10^{-3}A} = 200\Omega$

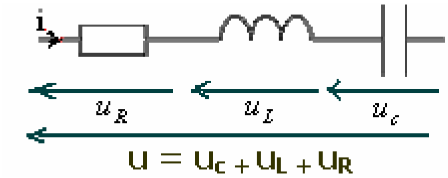
بتغيير التردد تتغير ممانعة الدارة .

3) الدراسة النظرية للدارة RLC

أ) المعادلة التفاضلية

نعتبر الدارة المتوالية RLC، ونختار اصل التواريخ بحيث تكون شدة التيار : $i(t)=I_m\cos\omega.t$

وليكن φ طور التوتر بالنسبة للتيــار : $u(t)=U_m\cos(\omega.t+\varphi)$



بتطبيق قانون إضافية التوترات اللحظية :

$$u = u_R + u_L + u_C \qquad (1)$$

– بالنسبة للموصل الاومي : $u_R = R.i$

– بالنسبة للوشيعة (التي نعتبر مقاومتها منعدمة): $u_L = L\dfrac{di}{dt}$

– بالنسبة للمكثف : $u_c = \dfrac{q}{C}$

وبما أن : $i = \dfrac{dq}{dt}$ فإن : $dq = i.dt$ أي : $q = \int_0^t i.dt$ ومنه : $u_c = \dfrac{q}{C} = \dfrac{\int_0^t i.dt}{C}$

وبالتعويض المعادلة (1) تصبح كما يلي :

$$\boxed{u = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{\int_0^t i.dt}{C}}$$ وهي المعادلة التفاضلية للدارة المتوالية RLC

وبما أن : $i(t)=I_m\cos\omega.t$

فإن : $$\frac{di}{dt} = -I_m.\omega.\sin\omega.t = I_m.\omega.\cos(\omega.t+\frac{\pi}{2})$$

و : $$\int_0^t i.dt = \int_0^t I_m.\cos\omega t = \frac{I_m}{\omega}\sin\omega.t = \frac{I_m}{\omega}\cos(\omega.t-\frac{\pi}{2})$$

وبذلك تكتب المعادلة التفاضلية كما يلي :

$$\boxed{U_m.\cos(\omega.t+\varphi) \;=\; RI_m.\cos\omega.t \;+\; LI_m\omega\cos(\omega.t+\frac{\pi}{2}) \;+\; \frac{I_m}{C.\omega}.\cos(\omega.t-\frac{\pi}{2})}$$

ب) حل المعادلة التفاضلية

يهدف حل هذه المعادلة إلى تحديد كل من الوسع U_m والطور φ .

من أجل ذلك نستعمل إنشاء فرينيل ونقرن بكل دالة جيبية متجهة فرينيل المناسبة .

نقرن بالدالة $RI_m.\cos\omega.t$ متجهة ---- > $\vec{V}_1$ منظمها RI_m. وتكون زاوية $(\vec{V}_1,\vec{ox}) = 0$ أي منطبقة مع ox.

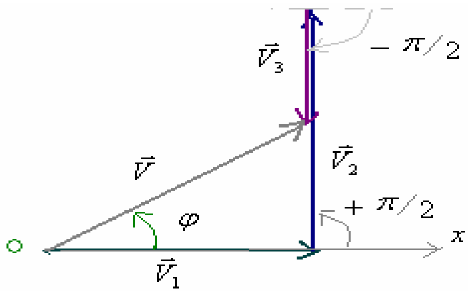
نقرن بالدالة $L\omega I_m.\cos(\omega.t+\dfrac{\pi}{2})$ متجهة ---- > $\vec{V}_2$ منظمها $L\omega I_m$. وتكون زاوية $(\vec{V}_2,\vec{ox}) = +\dfrac{\pi}{2}$ مع المحور ox .

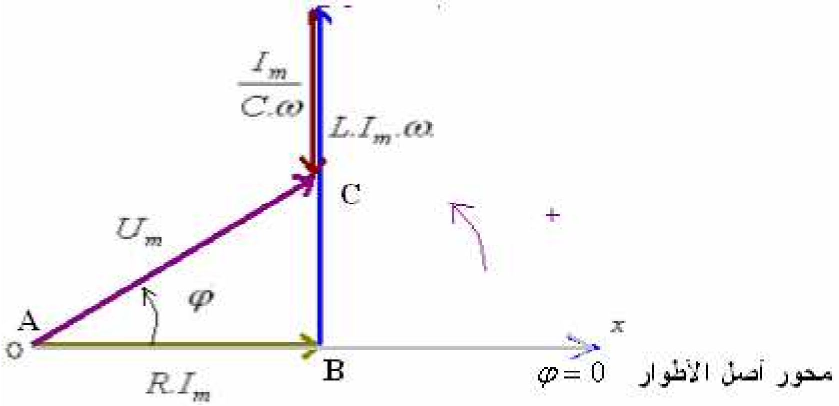
نقرن بالدالة $\dfrac{I_m}{C\omega}.\cos\omega.t$ متجهة ---- > $\vec{V}_3$ منظمها $\dfrac{I_m}{C\omega}$. وتكون زاوية $(\vec{V}_3,\vec{ox}) = -\dfrac{\pi}{2}$ مع ox.

نقرن بالدالة $U_m.\cos(\omega.t+\varphi)$ متجهة ---- > $\vec{V}$ منظمها U_m. وتكون زاوية φ مع ox .

ونحصل على انشاء فرينيل بمثيل المجموع : $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$

أي:





اعتمادا على إنشاء فرينيل وباستعمال مبرهنة بيتاغورس :

في المثلث ABC القائم الزاوية لدينا : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

أي: $U_m{}^2 = R^2 I_m{}^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2 . I_m{}^2$

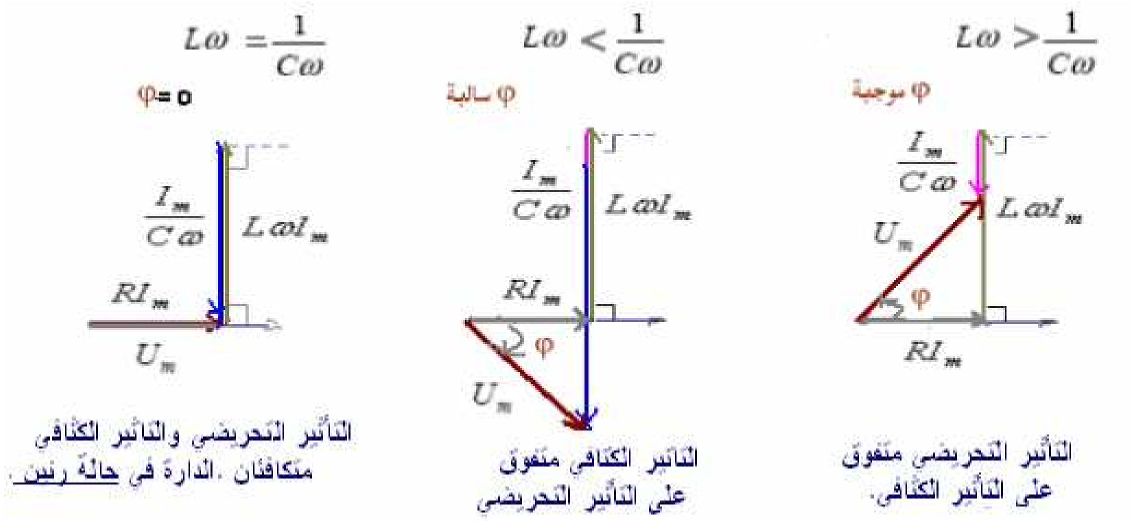
أي: $Z^2 I_m{}^2 = R^2 I_m{}^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2 . I_m{}^2$ نختزل ب : $I_m{}^2$ ونحصل على: $Z^2 = R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2$ ومنه :

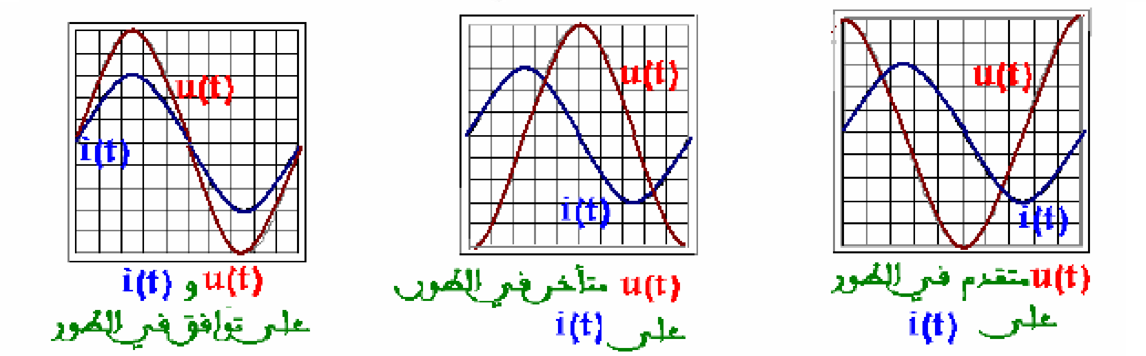
الممانعة $\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$

و لدينا في المثلث ABC القائم الزاوية: $tg\varphi = \frac{BC}{AB}$ و: $\cos\varphi = \frac{AB}{AC}$ أي :

الطور φ : $\boxed{tg\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}}$ أو : $\boxed{\cos\varphi = \frac{RI_m}{U_m} = \frac{R}{Z}}$

<u>حسب قيم</u> $L\omega$ و $\frac{1}{C\omega}$ <u>يتفوق التأثير التحريضي</u> (<u>المتعلق ب</u> $L\omega$) <u>أو التأثير الكثافي</u> (<u>المتعلق ب</u> $\frac{1}{C\omega}$) .



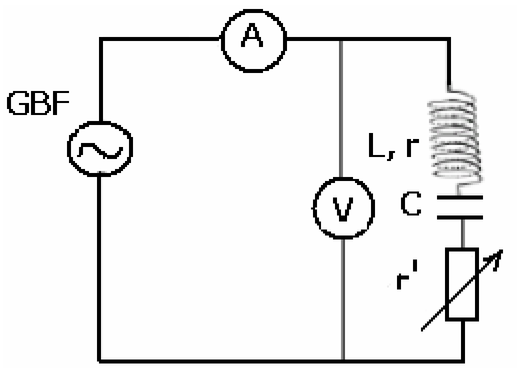


الدالة المتقدمة في الطور هي التي تتقاطع مع محور الزمن قبل الأخرى عندما ننتقل في المنحى الموجب لمحور الزمن t:
(تتم المقارنة عند صعود كل من الدالتين أو عند هبوط كل منهما).

III ظاهرة الرنين الكهربائي

1) الدراسة التجريبية

ننجز التركيب التالي: $C = 0,9\mu F$ $L = 1,1H$



تردد المولد GBF قابل للضبط.والمقاومة r' كذلك.

$C = 0,9\mu F$ ؛ $L = 1,1H$

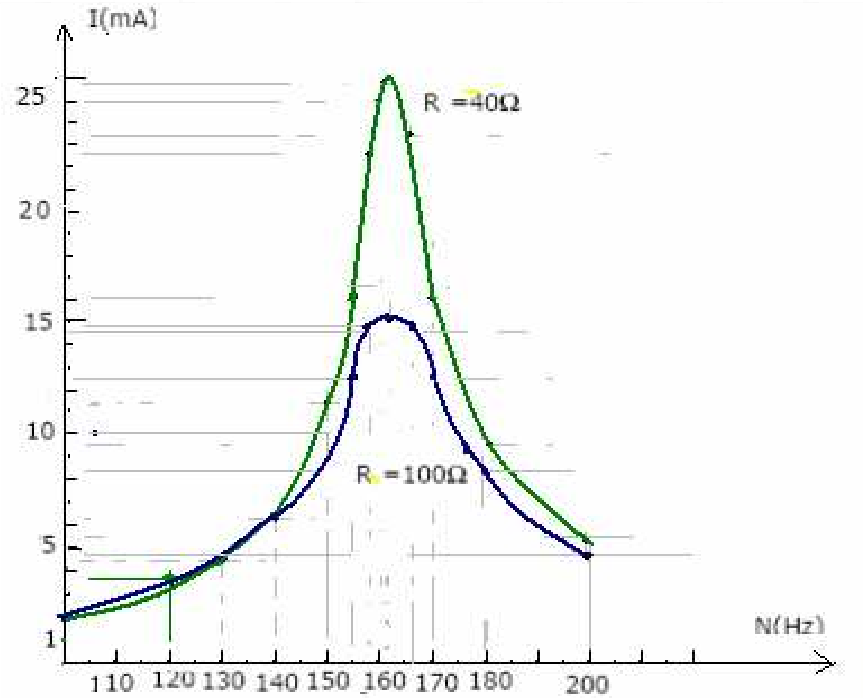
المقاومة الكلية للدارة $R = r + r'$

نبقي التوتر الفعال $U = 2V$ ثابتا .

نقيس تغيرات الشدة الفعالة للتيار الكهربائي في الدارة بدلالة تغيرات التردد ، ثم نغيير قيمة المقاومة الكلية للدارة ونعيد الدراسة.

نتائج التجربة :

	N(Hz)	100	120	130	140	150	155	158	160	166	170	180	200
R =40Ω	I(mA)	2	3,12	4,37	6,25	11,25	16,6	22,5	25	23,12	16	9,37	5,37
R =100Ω	I(mA	2	3,75	4,37	6,25	10	12,5	14,5	14,75	14,5	12,5	8,25	4,75



تبين التجربة ما يلي :

- عند الرنين تكون الشدة الفعالة للتيار في الدارة قصوية .
- كلما كانت مقاومة الدارة صغيرة كلما كان الرنين حادا (أي تكون القمة بارزة).
- التردد عند الرنين لا يتعلق بقيمة مقاومة الدارة.

عند الرنين تردد المولد (المثير) $N = N_O = 160Hz$ وهو مساو للتردد الخاص للدارة RLC ، $N_O = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

2) المقادير المميزة للرنين

▼ التردد عند الرنين :

$$I=\frac{U}{Z}=\frac{U}{\sqrt{R^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}}$$

I تكون قصوية عندما تكون الممانعة Z دنوية أي $L\omega-\frac{1}{C\omega}=0$

$$LC\omega^2=1$$

$$\omega=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

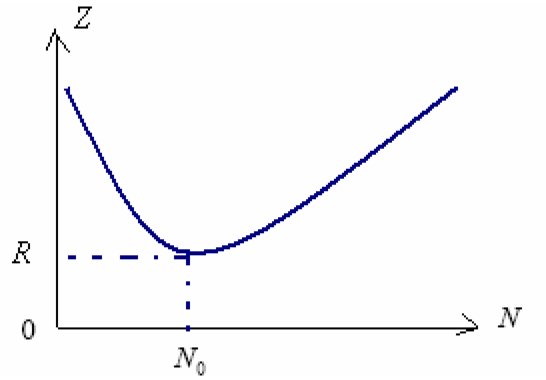
$$N=N_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

▼ ممانعة الدارة عند الرنين : $L\omega=\frac{1}{C\omega} \quad \Rightarrow \quad Z=R$

تمثيل الدالة :

$$Z=\sqrt{(R+r)^2+(2\pi NL-\frac{1}{2.\pi N.C})^2}$$

تبين أن الممانعة عند الرنين تأخذ قيمة دنيا تساوي : R



▼ شدة التيار الفعالة عند الرنين : $I_O=\frac{U}{R}$

▼ طور التوتر بالنسبة للتيار عند الرنين :

لدينا $tg\varphi=\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R}$ وعند الرنين : $L\omega-\frac{1}{C\omega}=0 \Rightarrow tg\varphi=0 \Rightarrow \varphi=0$.

عند الرنين يكون التوتر اللحظي u_{RLC} والشدة اللحظية للتيار المار في الدارة على توافق في الطور.

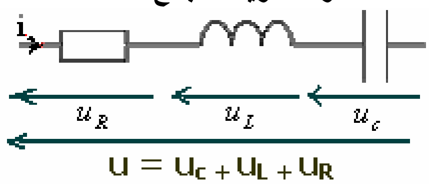
ملحوظة رقم 1 إذا كانت مقاومة الوشيعة غير مهملة :

ممانعة الدارة تكتب كما يلي : $Z=\sqrt{(R+r)^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}$

$tg\varphi=\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R+r}$ و: $\cos\varphi=\frac{R+r}{Z}$ الشدة الفعالة عند الرنين $I_O=\frac{U}{R+r}$.

ملحوظة رقم 2

التوترات اللحظية هي التي تجمع بينما التوترات الفعالة والقصوية لاتجمع.



$U_m \neq U_{R_m}+U_{L_m}+U_{C_m}$ بالقيم القصوية

$U \neq U_R+U_L+U_C$ بالقيم الفعالة

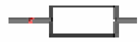
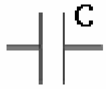
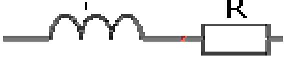
ملحوظة رقم 3

قانون أوم في التيار الكهربائي المتناوب:

- بالنسبة للقيم اللحظية: $u=Z.i$
- بالنسبة للقيم الفعالة : $U=Z.I$

▪ بالنسبة للقيم القصوية: $U_m = Z.I_m$

نعطي في الجدول التالي ممانعة الدارة لبعض ثنائيات القطب الكهربائية:

ثنائي القطب	 موصل أومي	 مكثف	 وشيعة	
قانون أوم للقيم الفاعلة	$U = RI$	$U = \frac{I}{C\omega}$	$U = L\omega.I$	$U = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}.I$
الممانعة Z	$Z = R$	$Z = \frac{1}{C\omega}$	$Z = L\omega$	$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$

ومنه يتضح أن وحدة كل من $L\omega$ و $\frac{1}{C\omega}$ هي: Ω.

3) المنطقة الممررة : La bande passsate

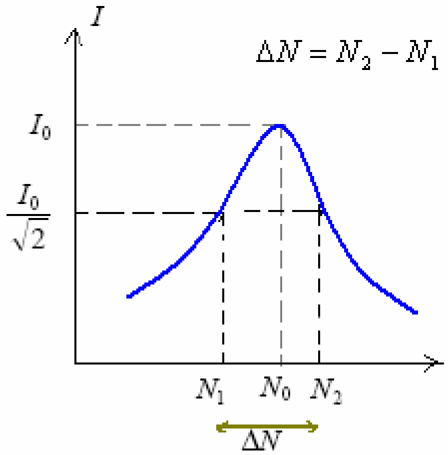
أ) تعريف

المنطقة الممررة لدارة RLC هي مجال الترددات $[N_1, N_2]$ حيث تكون الشدة الفعالة للتيار عند الرنين I_0 أكبر أو مساوية ل: $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$.

ب) عرض المنطقة الممررة

يرمز لعرض المنطقة الممررة ب: ΔN مع : $\Delta N = N_2 - N_1$

N_1 و N_2 الترددان الموافقان ل : $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$.



ج) تحديد عرض المنطقة الممررة

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})}} \quad (1)$$

قيمتها عند الرنين $I_0 = \frac{U}{R}$

لنبحث عن القيمتين ω_1 و ω_2 اللتان تحددان المنطقة الممررة.

$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ مع : $I_0 = \frac{U}{R}$ $\Leftarrow$ $I = \frac{U}{R}\frac{1}{\sqrt{2}}$

بتعويض I بقيمتها في العلاقة **(1)**

$$\frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{U}{R}$$

$$\frac{1}{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} = \frac{1}{2R^2} \Rightarrow 2R^2 = R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2 \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm R$$

$$\begin{cases} LC\,\omega_2^2 - 1 = +RC\omega_2 & (2) \\ LC\omega_1^2 - 1 = -RC\omega_1 & (3) \end{cases}$$

$$LC(\omega_2^2-\omega_1^2)=RC(\omega_2+\omega_1)$$

$$\Rightarrow \quad LC(\omega_2-\omega_1)=RC \Leftrightarrow \Delta\omega=\omega_2-\omega_1=\frac{R}{L}$$

$$\boxed{\Delta\omega=\frac{R}{L}}$$

وبما أن : $\omega=2.\pi.N$ **فإن :** $\Delta\omega=2.\pi.\Delta N$ **ومنه عرض المنطقة الممررة :** $\Delta N=\frac{\Delta\omega}{2.\pi}$ **.**

$$\boxed{\Delta N=\frac{\Delta\omega}{2\pi}=\frac{R}{2\pi L}}$$

4) معامل الجودة Facteur de qualité

معامل الجودة Q لثنائي قطب RLC و حاصل قسمة تردد الرنين وعرض المنطقة الممررة: $Q=\frac{N_O}{\Delta N}$ وهو مقدار بدون وحدة،
وهو يميز حدة الرنين ، بحيث كلما كان معامل الجودة كبيرا كلما كان الرنين حادا .

بما أن: $\omega=2\pi.N$ فإن : $Q=\frac{N_O}{\Delta N}=\frac{\omega_o}{\Delta\omega}$ ونعلم أن: $\Delta\omega=\frac{R}{L}$

إذن: $Q=\frac{L\omega_O}{R}$ ومن خلال علاقة الرنين لدينا : $L\omega_O=\frac{1}{C\omega_O}$

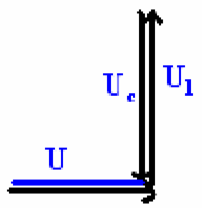
ومنه : $\boxed{Q=\frac{L\omega_O}{R}=\frac{1}{RC\,\omega_O}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$ لأن: $\omega_O=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

5) فرط التوتر La surtension

التوتر الفعال بين مربطي المكثف عند الرنين : $U_C=\frac{I_O}{C\omega}$.
التوتر الفعال بين مربطي الوشيعة عند الرنين : $U_L=L\omega.I_O$.
وبما أنه عند الرنين يتكافأ التأثير الكثافي للمكثف مع التأثير التحريضي للوشيعة .فإن:

$$U_c=U_L \quad \Leftarrow \quad L\omega_0 I_0=\frac{I_0}{C\omega_0}$$

مع $U=R.I_0$



$$U_C=\frac{I_0}{C\omega_0}=\frac{U}{RC\omega_0}=Q.U$$

$$U_L=L\omega_0 I_0=\frac{L\omega_0 U}{R}=Q.U$$

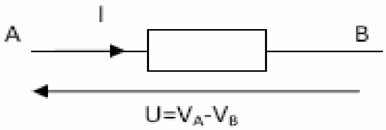
$$Q=\frac{U_C}{U}=\frac{Q_L}{U}$$

عند الرنين يكون التوتر بين مربطي الوشيعة والمكثف أكبر Q مرة من التوتر الفعال U بين مربطي الدارة RLC،
لذلك معامل الجودة يسمى أحيانا :معامل فرط التوتر.
لما كانت مقاومة الدارة صغيرة كلما كان معامل الجودة كبيرا وتكون الدارة مقرا لفرط التوتر.

IIV القدرة في النظام المتناوب الجيبي

1) القدرة اللحظية

نعتبر ثنائي قطب AB يمر فيه تيار كهربائي لحظي شدته : $i(t)=I\sqrt{2}\cos\omega.t$. ومطبق بين مربطيه توتر لحظي :
$u(t)=U\sqrt{2}\cos(\omega.t+\varphi)$.



القدرة الكهربائية اللحظية التي يتبادلها هذا الثنائي القطب هي: $p(t)=u(t).i(t)=2U.I.\cos(\omega.t+\varphi).\cos\omega.t$

أي: $$p(t)=2U.I.\cos(\omega.t+\varphi).\cos\omega.t$$

وبتطبيق العلاقة: $$\cos a.\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$

نحصل على :

$$\boxed{p(t)=U.I\left[\cos\varphi+\cos(2\omega.t+\varphi)\right]}$$ وهو تعبير القدرة اللحظية.

2) القدرة المتوسطة

المقدار $UI\cos\varphi$ يمثل القدرة المتوسطة التي يرمز إليها ب: P وهي الطاقة الكهربائية المكتسبة من طرف ثنائي القطب خلال الدور T.

$$P=U.I.\cos\varphi$$ القدرة المتوسطة بالواط: W

في هذه العلاقة المقدار $S=U.I$ يمثل القدرة الظاهرية بينما المعامل $\cos\varphi$ معامل القدرة.

ملحوظة: لدينا : $\cos\varphi=\frac{R}{Z}$ و: $U=Z.I$ ومنه القدرة المتوسطة : $P=UI\cos\varphi=(Z.I).I.\frac{R}{Z}=R.I^2$.

ومنه يتضح أن القدرة المتوسطة في دارة كهربائية RLC تستهلك على مستوى مقاومة الدارة بمفعول جول.

إذا كانت مقاومة الوشيعة غير مهملة تكون : $P=(R.+r)I^2$

Sbiro abdelkrim
Lycée agricole oulad –taima région d'Agadir Maroc
Mail : sbiabdou@yahoo.fr
msn : sbiabdou@hotmail.fr

pour toute observation contactez moi