

حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

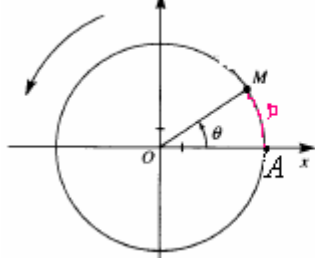
I الأقسام الزاوي - السرعة الزاوية - التسارع الزاوي:

(1) تذكير:

يكون جسم صلب، غير قابل للتشويه، في حركة دوران حول محور ثابت Δ إذا كانت جميع نقطه لها حركة دائرية مركزية على هذا المحور (باستثناء النقط المنتمية للمحور Δ).

(2) معلمة موضع المتحرك:

تتم معلمة موضع المتحرك، في حالة حركة الدوران، باستعمال الأقسام المنحني أو الأقسام الزاوي.



$$s = \widehat{AM} \text{ : الأقسام المنحني}$$

$$\theta = (\overline{OA}, \overline{OM}) \text{ : الأقسام الزاوي}$$

العلاقة بين الأقسام المنحني والأقسام الزاوي : $s = R \cdot \theta$

(3) السرعة الزاوية:

السرعة الزاوية هي مشتقة الأقسام الزاوي بالنسبة للزمن : $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ ووحدتها في النظام العالمي للوحدات : rad/s .

السرعة الخطية هي مشتقة الأقسام المنحني بالنسبة للزمن : $v = \frac{ds}{dt}$ ووحدتها في النظام العالمي للوحدات : m/s .

بما أن : $s = R \cdot \theta$ فإن : $\dot{s} = R \cdot \dot{\theta}$ وهي العلاقة بين السرعة الخطية والسرعة الزاوية. (مع $\dot{s} = v$)

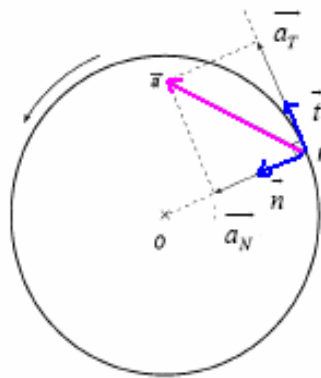
$$\dot{\theta}_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\tau} \text{ : مبيانيا : السرعة الزاوية اللحظية}$$

(4) التسارع الزاوي: (أ) تعريف:

التسارع الزاوي هو مشتقة السرعة الزاوية بالنسبة للزمن. $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}$ ب: ra/s^2 .

$$\ddot{\theta}_i = \frac{\dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_{i-1}}{2\tau} \text{ : مبيانيا : التسارع الزاوي اللحظي}$$

(ب) التسارع المماسي والتسارع المنظمي:



في معلم فرييني، متجهة التسارع: $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

- ومركبة منظمية: $a_N = \frac{v^2}{r}$

أي: لها مركبتين : - مركبة مماسية $a_T = \frac{dv}{dt}$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = r\ddot{\theta}$$

بما أن : $s = r\theta$ فإن : $\frac{dv}{dt} = r\ddot{\theta} \Leftrightarrow v = r\dot{\theta}$

$$a_N = r\dot{\theta}^2$$

II العلاقة الأساسية للحريك في حالة الدوران حول محور ثابت:

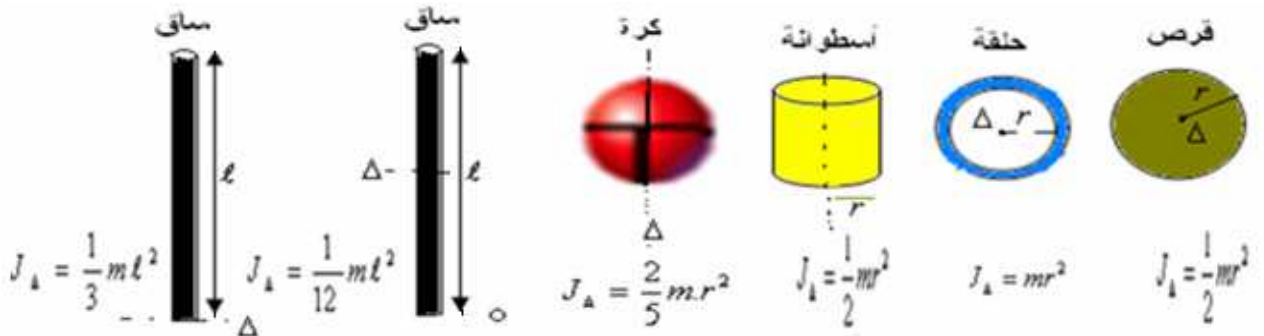
(1) نص العلاقة:

في معلم مرتبط بالأرض ، وبالنسبة لمحور ثابت (Δ) ، مجموع عزوم القوى المطبقة على جسم صلب في دوران حول محور ثابت ، يساوي ، في كل لحظة ، جذاء عزم القصور J_{Δ} والتسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للجسم.

$$\Sigma M_{\Delta} \vec{F} = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta} \quad \text{ب: } J_{\Delta} : \text{عزم قصور الجسم ب: } Kg.m^2$$

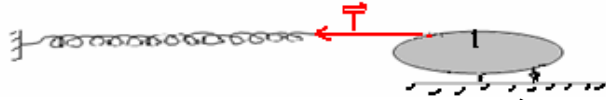
$\ddot{\theta}$: التسارع الزاوي ب: rad/s^2

(2) تعابير عزم القصور لبعض الأجسام ذات أشكال هندسية بسيطة:

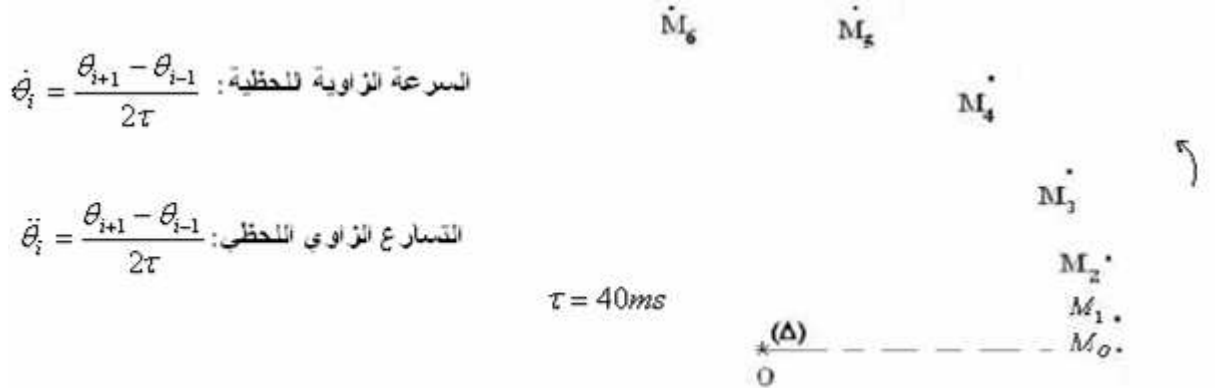


(3) التحقق التجريبي من العلاقة: $\Sigma M_{\Delta} \vec{F} = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$

نستعمل المنضدة الهوائية وننجز التركيب التالي:



ندير القرص حول محور دورانه Δ ثم نحرره فنحصل على التسجيل التالي:



مثال:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\theta_2 - \theta_0}{2\tau} = \frac{15^\circ - 0^\circ}{2 \times 20 \times 10^{-3} s} = \frac{15 \times \pi}{180} \frac{rad}{0.04} = 6.54 rad/s$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\theta_3 - \theta_1}{2\tau} = \frac{30^\circ - 5^\circ}{2 \times 20 \times 10^{-3} s} = \frac{25 \times \pi}{180} \frac{rad}{0.04} = 10.9 rad/s$$

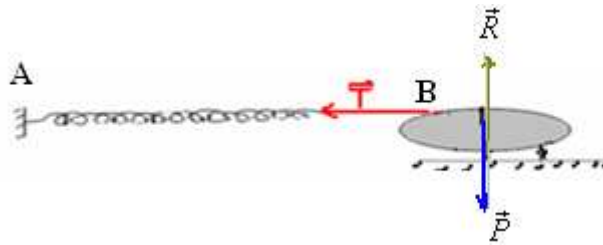
نتخذ المحور ox المار من M_0 محورا مرجعا للأفاصيل الزاوية ولحظة تسجيل M_0 أصلا للتواريخ.

القرص خلال حركته يخضع إلى تأثير القوى التالية: وزنه \vec{P} ، تأثير الخيط \vec{T} تأثير سطح التماس \vec{R} .

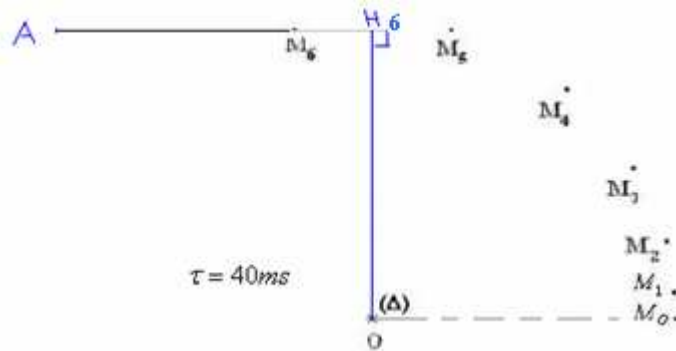
لنعين مجموع عزوم القوى : $\Sigma M_{\vec{F}_{\Delta}} = M_{\vec{P}_{\Delta}} + M_{\vec{R}_{\Delta}} + M_{\vec{T}_{\Delta}} = M_{\vec{T}_{\Delta}}$ لأن \vec{R} و \vec{P} تتقاطعان مع محور الدوران \Leftarrow عزم كل منهما منعدم.

وبذلك يمكن تحديد مجموع العزوم في كل لحظة t_i :

بمعرفة صلابة النابض وطوله الأصلي، نحصل على توتره في كل لحظة: $T_i = K(\ell_i - \ell_0)$ مع: $\ell_i = AB$



$d_i = AH_i$: هي المسافة الفاصلة بين خط تأثير القوة T_i ومحور الدوران Δ .



ندرج النتائج في الجدول التالي :

M_6	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	M_0	M_i الموضع
							t_i التاريخ
							θ_i (rad)
							$\dot{\theta}_i$ (rad / s)
							$\ddot{\theta}_i$
							$\sum M\vec{F}$
							$\frac{\sum M\vec{F}}{\ddot{\theta}}$

يتضح من خلال نتائج التجربة ما يلي : $\frac{\sum M\vec{F}}{\ddot{\theta}} = C^{te}$

بمعرفة كتلة القرص وشعاعه ، نحصل على قيمة عزم قصوره : $J_{\Delta} = \frac{1}{2}mr^2$ ونستنتج تجريبيا أن : $\frac{\sum M\vec{F}}{\ddot{\theta}} = J_{\Delta}$

$$\sum M_{\Delta}\vec{F} = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$$

وبالتالي :

III تطبيقات:

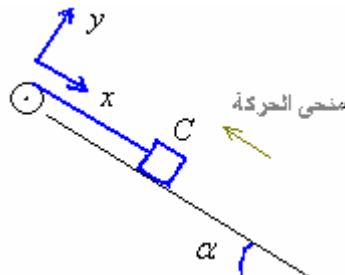
(1) تطبيق رقم 1:

نعتبر مجموعة ميكانيكية مكونة من : * بكرة متجانسة D شعاعها r وكتلتها m_0 ، قابلة للدوران حول محورها الأفقي والثابت.

* جسم صلب C كتلته m موضوع فوق مستوى مائل بزاوية α .

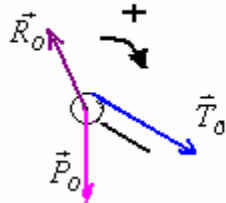
* خيط f غير قابل للشد ملفوف حول مجرى البكرة وطرفه الآخر مثبت بالجسم C . (انظر

(الشكل)



نحرر المجموعة فينزل الجسم C نحو الأسفل . (نعتبر الاحتكاكات مهملة).

عبر عن تسارع المجموعة بدلالة g ، α ، m و m_0 .



* المجموعة المدروسة {البكرة}

* جرد القوى : تخضع البكرة للقوى التالية :

- \vec{P}_O : وزنها .

- \vec{R}_O : تأثير محور الدوران .

- \vec{T}_O : القوة المطبقة من طرف الخيط .

$$\sum M_{\vec{F}_\Delta} = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

* تطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة :

$$(1) \quad M_\Delta(\vec{P}_O) + M_\Delta(\vec{R}_O) + M_\Delta(\vec{T}_O) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta} \quad \text{أي:}$$

بما أن خطي تأثير القوتين \vec{P} و \vec{R} يتقاطعان مع محور الدوران Δ ، فإن عزم كل منهما منعدم .

$$\text{أي : } M_\Delta(\vec{P}_O) = 0 \text{ و } M_\Delta(\vec{R}_O) = 0$$

وباعتبار المنحى الموجب لدوران البكرة، يكون تعبير عزم القوة \vec{T}_O بالنسبة لمحور الدوران Δ هو : $M_\Delta(\vec{T}_O) = +T_O \cdot r$

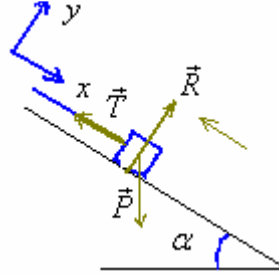
$$(2) \quad T_O = \frac{J_\Delta \cdot \ddot{\theta}}{r} \quad \text{أي: } T_O \cdot r = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

* المجموعة المدروسة {الجسم C}

* جرد القوى : الجسم C يخضع للقوى التالية : * \vec{P} وزنه .

* \vec{R} : تأثير المستوى المائل .

* \vec{T} : القوة المطبقة من طرف الخيط .



* بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم C أثناء حركته في معلم (o, \vec{i}, \vec{j}) معلم ومتعامد (انظر الشكل)

$$(3) \quad \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}_G \quad \text{أي: } \sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$R = m \cdot g \cdot \cos \alpha \quad \Leftrightarrow \quad P \cos \alpha + R = 0 \quad \text{على المحور } oy$$

$$(4) \quad T = m \cdot g \cdot \sin \alpha - m \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad P \sin \alpha + 0 - T = m \cdot a_x \quad \text{على المحور } ox$$

لأن $a_y = 0$ (منعدمة، لا حركة للجسم حسب oy) .

بما أن الخيط غير قابل للمد فهو يحتفظ بنفس التوتر في جميع نقطه، وبالتالي : $T = T_O$

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha - m \cdot a = \frac{J_\Delta \cdot \ddot{\theta}}{r} \quad \text{و (2) و (4) لدينا :}$$

بما أن الخيط لا ينزلق على البكرة : $s = r\theta \Rightarrow$ بالاشتقاق $v = r\dot{\theta} \Rightarrow$ بالاشتقاق $a = r\ddot{\theta}$

$$\text{العلاقة السابقة تصبح: } m \cdot g \cdot \sin \alpha - m \cdot a = \frac{J_\Delta \cdot a}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad m \cdot g \cdot \sin \alpha = a \left(m + \frac{J_\Delta}{r^2} \right) \quad \text{وبالتالي:}$$

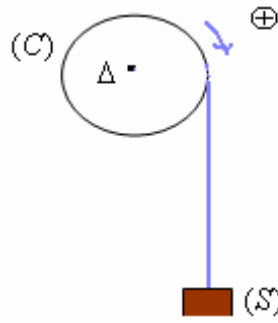
$$a = \frac{g \cdot \sin \alpha}{1 + \frac{J_\Delta}{m \cdot r^2}} \quad \text{مع : } J_\Delta = \frac{1}{2} m_o r^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{g \cdot \sin \alpha}{1 + \frac{m_o}{2 \cdot m}}$$

(2) تطبيق رقم 2:

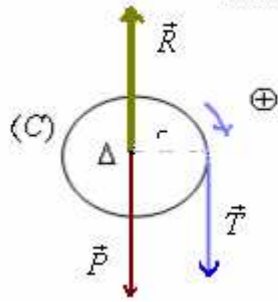
نعتبر اسطوانة C متجانسة ذات كتلتها $m_c = 2Kg$ ، شعاعها $r = 10cm$ قابلة للدوران حول محور ثابت أفقي Δ يمر من مركزها .

نعلق في طرف خيط غير قابل للمد وملفوف حول الأسطوانة جسماً صلباً S كتلته $m_s = 1Kg$. نحرر المجموعة بدون سرعة بدنية .

القيمة المطلقة لعزم المزدوجة المقاومة الناتجة عن الاحتكاك والمطبقة على محور الأسطوانة : $M_c = 0,38N.m$



- (أ) اوجد تعبير التسارع الزاوي للاسطوانة بدلالة : M_C ، r ، J_Δ ، عزم قصور الأسطوانة و T_C شدة القوة المطبقة من طرف الخيط على C .
- (ب) حدد طبيعة حركة الجسم S .
- (ت) احسب قيمة تسارع الجسم S ثم استنتج الزاوي للاسطوانة $\ddot{\theta}$.
نعطي : $g = 9,8m/s^2$



* (أ) المجموعة المدروسة {الأسطوانة C }
* جرد القوى : الاسطوانة جسم C تخضع للقوى التالية :

\vec{P} * وزنها .

\vec{R} * : تأثير محور الدوران .

\vec{T} * : القوة المطبقة من طرف الخيط .

* المزدوجة لمقاومة ذات العزم M_C .

$$\sum M_{\vec{F}_\Delta} = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

* تطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة :

$$(a) \quad M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_\Delta(\vec{T}) + M_C = J_\Delta \cdot \ddot{\theta} \quad \text{أي :}$$

بما أن خطي تأثير القوتين \vec{P} و \vec{R} يتقاطعان مع محور الدوران Δ ، فإن عزم كل منهما منعدم .

$$\text{أي : } M_\Delta(\vec{P}) = 0 \text{ و } M_\Delta(\vec{R}) = 0$$

وباعتبار المنحى الموجب لدوران البكرة ، يكون تعبير عزم القوة \vec{T} بالنسبة لمحور الدوران Δ هو : $M_\Delta(\vec{T}) = +T \cdot r$

$$0 + 0 + T \cdot r - M_C = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

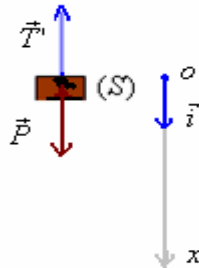
وبذلك تصبح العلاقة (a) :

$$\ddot{\theta} = \frac{T \cdot r - M_C}{J_\Delta} \quad \text{ومنه :}$$

المجموعة المدروسة {الجسم S } .

جرد القوى : الجسم S يخضع للقوى التالية : * \vec{P}_s وزنه .

* \vec{T}' : القوة المطبقة من طرف الخيط .



$$(b) \quad \vec{P}_s + \vec{T}' = m_s \vec{a}_G \quad \text{أي : } \Sigma \vec{F} = m_s \cdot \vec{a}_G \quad \text{*تطبيق القانون الثاني لنيوتن على الأسطوانة :}$$

$$(c) \quad +P_s - T' = m_s \cdot a \quad \text{* إسقاط العلاقة (b) على المحور } (o, \vec{i})$$

$$(c) \quad \text{وبما أن الخيط غير قابل للشد فإن : } T' = T = \frac{J_\Delta \cdot \ddot{\theta} + M_C}{r} \quad \text{* بالتعويض في العلاقة}$$

$$(d) \quad m_s \cdot g - \frac{J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta} + M_c}{r} = m_s \cdot a \quad \text{نحصل على:}$$

(d) بما أن الخيط لا ينزلق على البكرة فإن: $a = r\ddot{\theta}$ ونعلم أن $J_{\Delta} = \frac{1}{2} m_c \cdot r^2$ نعوض في العلاقة

$$a = \frac{m_s \cdot g - \frac{M_c}{r}}{m_s + \frac{m_c}{2}} = \frac{1 \times 9,8 - \frac{0,38}{0,1}}{1 + \frac{2}{2}} = 3 \text{ m/s}^2 \Leftarrow m_s \cdot g - \frac{\frac{1}{2} m_c \cdot r^2 \cdot \frac{a}{r} + M_c}{r} = m_s \cdot a$$

$$\ddot{\theta} = \frac{a}{r} = \frac{3}{0,1} = 30 \text{ rad/s}^2 \quad \text{فإن: } a = r\ddot{\theta} \quad \text{بما أن:}$$

SBIRO abdelkrim Lycée Agricole Oulad - Taima Agadir Maroc