

# حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

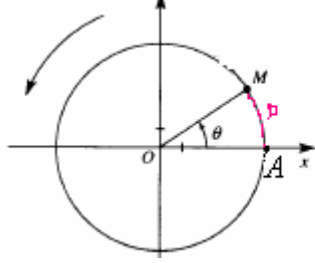
## I الأقسام الزاوي - السرعة الزاوية - التسارع الزاوي:

### (1) تذكير:

يكون جسم صلب، غير قابل للتشويه، في حركة دوران حول محور ثابت  $\Delta$  إذا كانت جميع نقطه لها حركة دائرية مركزية على هذا المحور (باستثناء النقط المنتمية للمحور  $\Delta$ ).

### (2) معلمة موضع المتحرك:

تتم معلمة موضع المتحرك، في حالة حركة الدوران، باستعمال الأقسام المنحني أو الأقسام الزاوي .



$$s = \widehat{AM} \text{ : الأقسام المنحني}$$

$$\theta = (\overline{OA}, \overline{OM}) \text{ : الأقسام الزاوي}$$

العلاقة بين الأقسام المنحني والأقسام الزاوي :  $s = R.\theta$

### (3) السرعة الزاوية:

السرعة الزاوية هي مشتقة الأقسام الزاوي بالنسبة للزمن :  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$  ووحدتها في النظام العالمي للوحدات :  $rad/s$  .

السرعة الخطية هي مشتقة الأقسام المنحني بالنسبة للزمن :  $v = \frac{ds}{dt}$  ووحدتها في النظام العالمي للوحدات :  $m/s$  .

بما أن :  $s = R.\theta$  فإن :  $\dot{s} = R.\dot{\theta}$  وهي العلاقة بين السرعة الخطية والسرعة الزاوية. (مع  $\dot{s} = v$ )

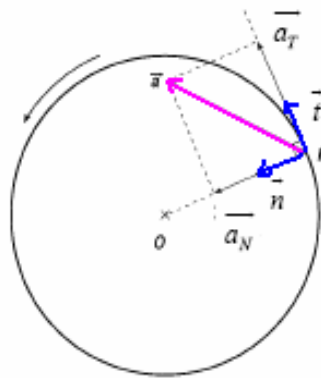
$$\dot{\theta}_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\tau} \text{ : مبيانيا : السرعة الزاوية اللحظية:}$$

### (4) التسارع الزاوي: (أ) تعريف:

التسارع الزاوي هو مشتقة السرعة الزاوية بالنسبة للزمن.  $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}$  ب:  $ra/s^2$  .

$$\ddot{\theta}_i = \frac{\dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_{i-1}}{2\tau} \text{ : مبيانيا : التسارع الزاوي اللحظي:}$$

### (ب) التسارع المماسي والتسارع المنظمي:



في معلم فرييني، متجهة التسارع:  $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

- ومركبة منظمية:  $a_N = \frac{v^2}{r}$

أي: لها مركبتين : - مركبة مماسية  $a_T = \frac{dv}{dt}$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = r\ddot{\theta}$$

بما أن :  $s = r\theta$  فإن :  $v = r\dot{\theta}$   $\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = r\ddot{\theta}$

$$a_N = r\dot{\theta}^2$$

## II العلاقة الأساسية للحريك في حالة الدوران حول محور ثابت:

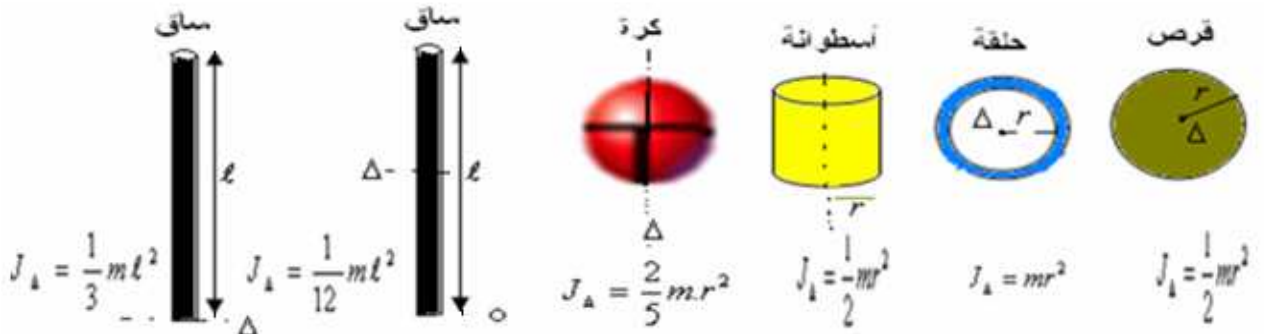
(1) نص العلاقة:

في معلم مرتبط بالأرض ، وبالنسبة لمحور ثابت ( $\Delta$ ) ، مجموع عزوم القوى المطبقة على جسم صلب في دوران حول محور ثابت ، يساوي ، في كل لحظة ، جذاء عزم القصور  $J_{\Delta}$  والتسارع الزاوي  $\ddot{\theta}$  للجسم.

$$\Sigma M_{\Delta} \vec{F} = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta} \quad \text{ب: } J_{\Delta} : \text{عزم قصور الجسم ب: } Kg.m^2$$

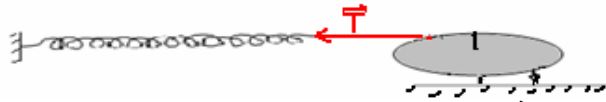
$\ddot{\theta}$  : التسارع الزاوي ب:  $rad/s^2$

(2) تعابير عزم القصور لبعض الأجسام ذات أشكال هندسية بسيطة:

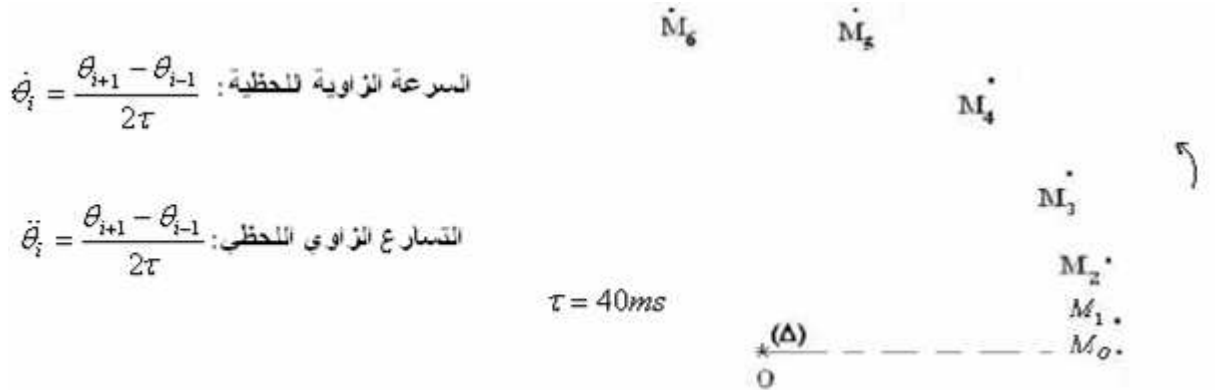


(3) التحقق التجريبي من العلاقة:  $\Sigma M_{\Delta} \vec{F} = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$

نستعمل المنضدة الهوائية وننجز التركيب التالي:



ندير القرص حول محور دورانه  $\Delta$  ثم نحرره فنحصل على التسجيل التالي:



مثال:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\theta_2 - \theta_0}{2\tau} = \frac{15^\circ - 0^\circ}{2 \times 20 \times 10^{-3} s} = \frac{15 \times \pi}{180} \frac{rad}{0.04} = 6.54 rad/s$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\theta_3 - \theta_1}{2\tau} = \frac{30^\circ - 5^\circ}{2 \times 20 \times 10^{-3} s} = \frac{25 \times \pi}{180} \frac{rad}{0.04} = 10.9 rad/s$$

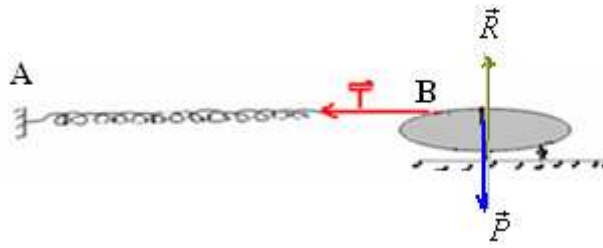
نتخذ المحور  $ox$  المار من  $M_0$  محورا مرجعا للأفاصيل الزاوية ولحظة تسجيل  $M_0$  أصلا للتواريخ.

القرص خلال حركته يخضع إلى تأثير القوى التالية: وزنه  $\vec{P}$  ، تأثير الخيط  $\vec{T}$  تأثير سطح التماس  $\vec{R}$  .

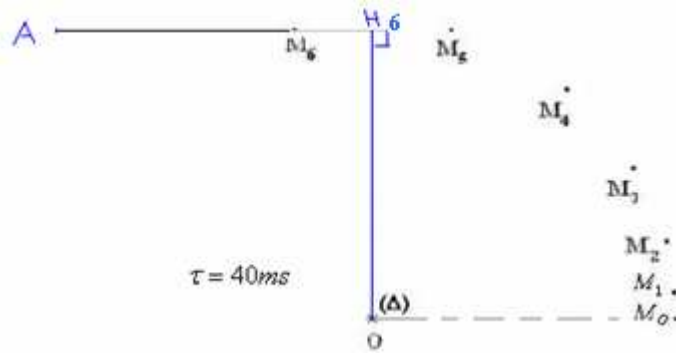
لنعين مجموع عزوم القوى :  $\Sigma M_{\vec{F}_{\Delta}} = M_{\vec{P}_{\Delta}} + M_{\vec{R}_{\Delta}} + M_{\vec{T}_{\Delta}} = M_{\vec{T}_{\Delta}}$  لأن  $\vec{R}$  و  $\vec{P}$  تتقاطعان مع محور الدوران  $\Leftarrow$  عزم كل منهما منعدم.

وبذلك يمكن تحديد مجموع العزوم في كل لحظة  $t_i$  :

بمعرفة صلابة النابض وطوله الأصلي، نحصل على توتره في كل لحظة:  $T_i = K(\ell_i - \ell_0)$  مع:  $\ell_i = AB$



$d_i = AH_i$  : هي المسافة الفاصلة بين خط تأثير القوة  $T_i$  ومحور الدوران  $\Delta$ .



ندرج النتائج في الجدول التالي :

$M_6$	$M_5$	$M_4$	$M_3$	$M_2$	$M_1$	$M_0$	$M_i$ الموضع
							$t_i$ التاريخ
							$\theta_i$ (rad)
							$\dot{\theta}_i$ (rad / s)
							$\ddot{\theta}_i$
							$\sum M\vec{F}$
							$\frac{\sum M\vec{F}}{\ddot{\theta}}$

يتضح من خلال نتائج التجربة ما يلي :  $\frac{\sum M\vec{F}}{\ddot{\theta}} = C^{te}$

بمعرفة كتلة القرص وشعاعه ، نحصل على قيمة عزم قصوره :  $J_{\Delta} = \frac{1}{2}mr^2$  ونستنتج تجريبيا أن :  $\frac{\sum M\vec{F}}{\ddot{\theta}} = J_{\Delta}$

$$\sum M_{\Delta}\vec{F} = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$$

وبالتالي :

### III تطبيقات:

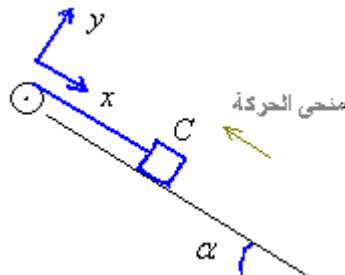
#### (1) تطبيق رقم 1:

نعتبر مجموعة ميكانيكية مكونة من : \* بكرة متجانسة  $D$  شعاعها  $r$  وكتلتها  $m_0$  ، قابلة للدوران حول محورها الأفقي والثابت.

\* جسم صلب  $C$  كتلته  $m$  موضوع فوق مستوى مائل بزاوية  $\alpha$  .

\* خيط  $f$  غير قابل للشد ملفوف حول مجرى البكرة وطرفه الآخر مثبت بالجسم  $C$  . (انظر

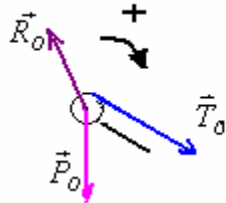
(الشكل)



نحرر المجموعة فينزل الجسم  $C$  نحو الأسفل. (نعتبر الاحتكاكات مهملة).

عبر عن تسارع المجموعة بدلالة  $g$  ،  $\alpha$  ،  $m$  و  $m_0$  .

\*\*\*\*\*



\* المجموعة المدروسة {البكرة}

\* جرد القوى : تخضع البكرة للقوى التالية :

-  $\vec{P}_O$  : وزنها .

-  $\vec{R}_O$  : تأثير محور الدوران .

-  $\vec{T}_O$  : القوة المطبقة من طرف الخيط .

$$\sum M_{\vec{F}_\Delta} = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

\* تطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة :

$$(1) \quad M_\Delta(\vec{P}_O) + M_\Delta(\vec{R}_O) + M_\Delta(\vec{T}_O) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta} \quad \text{أي:}$$

بما أن خطي تأثير القوتين  $\vec{P}$  و  $\vec{R}$  يتقاطعان مع محور الدوران  $\Delta$  ، فإن عزم كل منهما منعدم .

$$\text{أي : } M_\Delta(\vec{P}_O) = 0 \text{ و } M_\Delta(\vec{R}_O) = 0$$

وباعتبار المنحى الموجب لدوران البكرة ، يكون تعبير عزم القوة  $\vec{T}_O$  بالنسبة لمحور الدوران  $\Delta$  هو :  $M_\Delta(\vec{T}_O) = +T_O \cdot r$

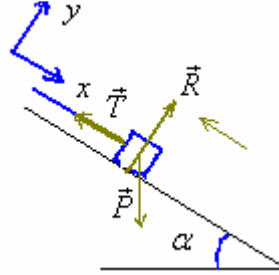
$$(2) \quad T_O = \frac{J_\Delta \cdot \ddot{\theta}}{r} \quad \text{أي: } T_O \cdot r = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

\* المجموعة المدروسة {الجسم C}

\* جرد القوى : الجسم C يخضع للقوى التالية : \*  $\vec{P}$  وزنه .

\*  $\vec{R}$  : تأثير المستوى المائل .

\*  $\vec{T}$  : القوة المطبقة من طرف الخيط .



\* بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم C أثناء حركته في معلم  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  معلم ومتعامد (انظر الشكل)

$$(3) \quad \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}_G \quad \text{أي: } \sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$R = m \cdot g \cdot \cos \alpha \quad \Leftrightarrow \quad P \cos \alpha + R = 0 \quad \text{على المحور } oy$$

$$(4) \quad T = m \cdot g \cdot \sin \alpha - m \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad P \sin \alpha + 0 - T = m \cdot a_x \quad \text{على المحور } ox$$

(لأن  $a_y = 0$  منعومة ، لا حركة للجسم حسب  $oy$ ) .

بما أن الخيط غير قابل للمد فهو يحتفظ بنفس التوتر في جميع نقطه ، وبالتالي :  $T = T_O$

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha - m \cdot a = \frac{J_\Delta \cdot \ddot{\theta}}{r} \quad \text{و (2) و (4) لدينا :}$$

بما أن الخيط لا ينزلق على البكرة :  $s = r\theta$  بالاشتقاق  $v = r\dot{\theta}$  بالاشتقاق  $a = r\ddot{\theta}$

$$\text{العلاقة السابقة تصبح: } m \cdot g \cdot \sin \alpha - m \cdot a = \frac{J_\Delta \cdot a}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad m \cdot g \cdot \sin \alpha = a \left( m + \frac{J_\Delta}{r^2} \right) \quad \text{وبالتالي:}$$

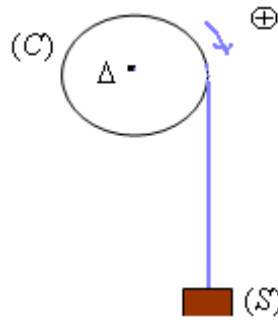
$$a = \frac{g \cdot \sin \alpha}{1 + \frac{J_\Delta}{m \cdot r^2}} \quad \text{مع : } J_\Delta = \frac{1}{2} m_o r^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{g \cdot \sin \alpha}{1 + \frac{m_o}{2 \cdot m}}$$

## (2) تطبيق رقم 2:

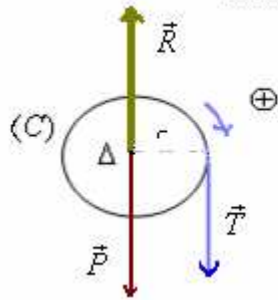
نعتبر اسطوانة C متجانسة ذات كتلتها  $m_c = 2Kg$  ، شعاعها  $r = 10cm$  قابلة للدوران حول محور ثابت أفقي  $\Delta$  يمر من مركزها .

نعلق في طرف خيط غير قابل للمد وملفوف حول الأسطوانة جسما صلبا  $S$  كتلته  $m_s = 1Kg$  . نحرر المجموعة بدون سرعة بدنية .

القيمة المطلقة لعزم المزدوجة المقاومة الناتجة عن الاحتكاك والمطبقة على محور الأسطوانة :  $M_c = 0,38N.m$



- (أ) اوجد تعبير التسارع الزاوي للاسطوانة بدلالة :  $M_C$  ،  $r$  ،  $J_\Delta$  ، عزم قصور الأسطوانة و  $T_C$  شدة القوة المطبقة من طرف الخيط على  $C$  .
- (ب) حدد طبيعة حركة الجسم  $S$  .
- (ت) احسب قيمة تسارع الجسم  $S$  ثم استنتج الزاوي للاسطوانة  $\ddot{\theta}$  .  
نعطي :  $g = 9,8m/s^2$



\* (أ) المجموعة المدروسة {الأسطوانة  $C$ }  
\* جهد القوى : الاسطوانة جسم  $C$  تخضع للقوى التالية :

$\vec{P}$  وزنها .

$\vec{R}$  : تأثير محور الدوران .

$\vec{T}$  : القوة المطبقة من طرف الخيط .

\* المزدوجة لمقاومة ذات العزم  $M_C$  .

$$\sum M_{\vec{F}_\Delta} = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

\* تطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة :

$$(a) \quad M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_\Delta(\vec{T}) + M_C = J_\Delta \cdot \ddot{\theta} \quad \text{أي:}$$

بما أن خطي تأثير القوتين  $\vec{P}$  و  $\vec{R}$  يتقاطعان مع محور الدوران  $\Delta$  ، فإن عزم كل منهما منعدم .

$$\text{أي : } M_\Delta(\vec{P}) = 0 \text{ و } M_\Delta(\vec{R}) = 0$$

وباعتبار المنحى الموجب لدوران البكرة ، يكون تعبير عزم القوة  $\vec{T}$  بالنسبة لمحور الدوران  $\Delta$  هو :  $M_\Delta(\vec{T}) = +T \cdot r$

$$0 + 0 + T \cdot r - M_C = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

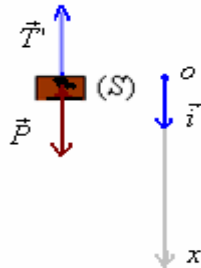
وبذلك تصبح العلاقة (a) :

$$\ddot{\theta} = \frac{T \cdot r - M_C}{J_\Delta} \quad \text{ومنه :}$$

المجموعة المدروسة {الجسم  $S$ } .

جهد القوى : الجسم  $S$  يخضع للقوى التالية : \*  $\vec{P}_s$  وزنه .

\*  $\vec{T}'$  : القوة المطبقة من طرف الخيط .



$$(b) \quad \vec{P}_s + \vec{T}' = m_s \vec{a}_G \quad \text{أي: } \Sigma \vec{F} = m_s \cdot \vec{a}_G \quad \text{*تطبيق القانون الثاني لنيوتن على الأسطوانة} :$$

$$(c) \quad +P_s - T' = m_s \cdot a \quad \text{على المحور } (o, \vec{i}) \quad \text{* إسقاط العلاقة (b) على المحور } (o, \vec{i})$$

$$(c) \quad \text{وبما أن الخيط غير قابل للشد فإن : } T' = T = \frac{J_\Delta \cdot \ddot{\theta} + M_C}{r} \quad \text{بالتعويض في العلاقة}$$

$$(d) \quad m_s \cdot g - \frac{J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta} + M_c}{r} = m_s \cdot a \quad \text{نحصل على:}$$

(d) بما أن الخيط لا ينزلق على البكرة فإن:  $a = r\ddot{\theta}$  ونعلم أن  $J_{\Delta} = \frac{1}{2} m_c \cdot r^2$  نعوض في العلاقة

$$a = \frac{m_s \cdot g - \frac{M_c}{r}}{m_s + \frac{m_c}{2}} = \frac{1 \times 9,8 - \frac{0,38}{0,1}}{1 + \frac{2}{2}} = 3 \text{ m/s}^2 \Leftarrow m_s \cdot g - \frac{\frac{1}{2} m_c \cdot r^2 \cdot \frac{a}{r} + M_c}{r} = m_s \cdot a$$

$$\ddot{\theta} = \frac{a}{r} = \frac{3}{0,1} = 30 \text{ rad/s}^2 \quad \text{فإن: } a = r\ddot{\theta} \quad \text{بما أن:}$$

SBIRO abdelkrim Lycée Agricole Oulad - Taima Agadir Maroc